

УДК 577.21

**ВИДОВАЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ЖИЗНИ В СВЕТЕ ПРИМЕНЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ СМЕРТНОСТИ К КОРРЕЛЯЦИИ
СТРЕЛЕРА-МИЛДВАНА**

Данилов Владимир Васильевич

доктор физ.-мат.наук, профессор

Иванюк Александр Максимович

ФГБОУ ВО «Петербургский государственный университет путей
сообщения Императора Александра I»

Аннотация. В настоящей работе к выводу выражения аналогичного корреляции Стрелера-Милдвана применён математический аппарат, использующий полученные нами ранее следствия уравнения смертности. Найденные выражения показывают, что функция интенсивности смертности $\mu_6(t)$ зависит только от одного «параметра» τ – среднего (по популяции) периода полового созревания. Проведённое исследование можно считать выводом корреляции Стрелера-Милдвана, базирующимся только на теории надёжности. Высказано мнение, что отмеченные рядом авторов отклонения в корреляции связаны с игнорированием функции Мейкема - ее возрастной и исторической динамики.

Ключевые слова; уравнение смертности, корреляция Стрелера-Милдвана, функция Мейкема, интенсивность смертности, период полового созревания

**SPCEIES-SPECIFIC LIFESPAN IN THE LIGHT OF APPLICATION
OF THE MORTALITY EQUATION
TO THE STRELER-MILDWAN CORRELATION**

Danilov Vladimir Vasilievich

Ivanyuk Alexander Maksimovich

Abstract. In this paper, a mathematical apparatus is applied to the derivation of an etractxpression for a similar Strehler-Mildvan correlation, using the previously obtained consequences of the mortality equation. The expressions found show that

the mortality rate function $\mu_b(t)$ depends only on one “parameter” τ - the average (over the population) period of puberty. This study can be considered the conclusion of the Strehler-Mildwan correlation. based only on the theory of reliability. The opinion is expressed that the deviations in correlation noted by a number of authors are associated with ignoring the Makeham function - its age and historical dynamics.

Keywords; mortality equation, Strehler-Mildwan correlation, Makeham function, mortality rate, puberty.

Существующие сегодня проблемы повышения продолжительности жизни в России, а тем самым и уменьшения смертности требует анализа причин смертности адекватного вызовам времени. Одна из фундаментальных проблем биологии – выявление механизмов, определяющих продолжительность жизни живых существ вообще и человека в особенности. До недавнего времени основным препятствием в ее решении было незнание **закона распределения продолжительности жизни биологических организмов**. Это чрезвычайно важная задача, которая долгое время не находила полного и окончательного решения. На настоящее время надёжно установлено, что функция интенсивности смертности имеет вид:

$$\mu(t) = \mu_0(t) + A(t) \quad (1)$$

В силу случайного характера “А” (т.н. «функция Мейкема» [1]) искать её аналитический вид бессмысленно, поэтому все усилия исследователей сосредоточены на поиске аналитического вида $\mu_0(t)$ (*биологической составляющей интенсивности смертности*). Первый шаг в решении этой важной задачи был сделан в 1825 году актуарием Gompertz В. [2].

$$\mu_0(t) = R \exp(at) \quad (2),$$

где R и a – у Гомперца эмпирические константы. Формула (2) хорошо аппроксимирует таблицы смертности в возрасте 20-80 лет, но вне этого диапазона не работает. Поэтому проблема нахождения аналитической аппроксимации кривой смертности в литературе продолжает существовать (например, [3,4]). В работе [5] мы выдвинули гипотезу, в которой процесс жизнедеятельности рассматривается как нестационарный процесс, при котором существует динамическое взаимодействие между процессами старения и самовосстановления (витаукта), впервые введенного Фролькисом [6]. К решению этой задачи авторы [4]применили метод уравнений баланса населённости, часто используемый в нелинейной оптике [7,8]. Математически

это взаимодействие описывается дифференциальным балансным уравнением смертности (2),

$$\begin{cases} \frac{d\mu_6(t)}{dt} = \mu_6(t) \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t} \right) \\ \mu_6(t_0) = \mu_6^0 \end{cases} \quad (3)$$

решением которого является аналитическая функция - интенсивность смертности, имеющая вид

$$\mu_6(t) = R \exp\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) / \left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (4),$$

$$\text{где } R \equiv \mu_6^0 t_0 / \tau \quad (5)$$

В вышеприведенных уравнениях (2-4) μ_6^0 средняя (по популяции) интенсивность смертности в момент рождения, t_0 – среднее (по популяции) время родов, τ – средний (по популяции) период полового созревания. В отличие от (1) уравнение (3) значительно лучше аппроксимирует кривую смертности (оно действует на всём временном интервале), кроме того, в нём находится множитель $1/(t/\tau)$, описывающий процесс витаукта, а коэффициент R (как следует из уравнение (5)) получил смысловое содержание.

В 1960 г. в журнале "Science" была опубликована статья Strehler B.L. и Mildvan A.S. [9] "General theory mortality and aging", в которой предлагалось обоснование экспоненциального увеличения интенсивности смертности μ , и описывались некоторые формальные свойства кривой смертности Гомпертца. В этой работе отмечалось, что между параметрами закона Гомперца существует обратная связь, при этом суть самой корреляции в том, что графики функции $\mu_6(t)$ *по Гомперцу* (как функции возраста) **для разных популяций**, каждая из которых обладает своими собственными значениями параметров R и τ **пересекаются в одной точке**.

На этом основании координата, соответствующая возрасту пересечения всех зависимостей, получила в литературе название **видовой продолжительностью жизни**. Этой точке (при расчетах по Гомперцу) соответствует возраст $t^* = 68.5$ лет (Последующие коррекции немного увеличили эти значения [10]) и **интенсивность смертности** $\mu^* = 0.51$ 1/год. Однако известно, что зарегистрированные рекорды долголетия существенно превышают эту цифру и это один из основных доводов критиков найденной корреляции

В настоящей работе мы попытались применить строгий математический аппарат к выводу корреляции Стрелера-Милдвана, используя следствия уравнения смертности полученного нами ранее [5].

Результаты и обсуждение.

Для зависимостей вида (1) пересечение в одной точке возможно в том и только том случае, когда между предэкспоненциальным множителем (R) и показателем экспоненты (τ) существует следующая связь: $(R/\tau)=const$. На базе таблиц смертности для России за 1874-83гг., 1896-1897гг, 1907-1910гг, 1926 - 1927гг, и 1958г. [11-13] были построены таблицы [3,14,15] содержащие все демографические функции (кроме функции Мейкема), и скорректированные нами согласно [15], Используя данные этих таблиц мы протестировали полученное выражение (3) на предмет корреляции Стрелера-Милдвана. На основе формул (3) и (4) были определены параметры R , τ , t^* , которые сведены в таблицу 1. Выполненный на основе значений табл.1 рис.1 показывает линейный характер связи R и τ , тем самым существование корреляции Стрелера-Милдвана в случае использования формулы (3), т.е. модели авторов. Для мужчин в этой модели t^* составляет 121год, а $\mu^*= 0.95$ 1/год..

Таблица 1

К корреляции Strehler-Mildvan

Мужчины					
№	Год рожд.	Табл.	$R10^3$, 1/год	τ , лет	t^* лет
1	1810	1874	3.32	15.71	120.5
2	1839	1907	2.78	15.82	124.5
3	1860	1874	1.78	14.37	120.4
4	1880	1958	1.02	13.35	120.3
5	1882	1896	1.94	14.45	119.6
6	1888	1967	0.80	12.6	117.0
7	1914	1926	0.60	12.68	121.8

Для женщин (табл. и рисунок. не приводится) t^* равно 111.5 лет. Отметим, что полученные цифры существенно ближе к экспериментально

наблюдаемому возрасту долгожителей. Это безусловно говорит в пользу использования рассматриваемой модели.

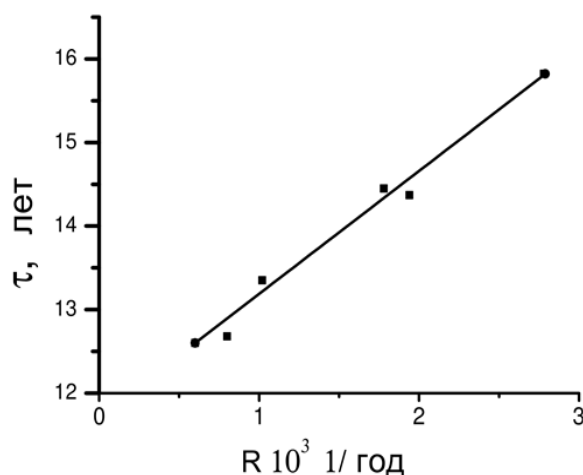


Рис. Корреляция Strehler-Mildvan по таблицам смертности для России за 1874-83гг., 1896-1897гг, 1907-1910гг , 1926 -1927гг, 1958 г с использованием формул 3 и 4

Заметим, что само понятие «видовая продолжительность жизни» одно из самых спорных в биологии. Тем не менее, эффект корреляции Стрелера-Милдвана, если он действительно существует, имеет важное значение для определения видовых характеристик продолжительности жизни. Авторы являются приверженцами использования в биологии продолжительности жизни идей и методов теории надёжности, где аналогом функции интенсивности смертности является функция обратимых и необратимых отказов. В представлении нашей модели видовая продолжительность жизни – это время, за которое число **доживающих** уменьшается в e раз независимо от характера интенсивности смертности (т.е. объективная характеристика кинетики самого процесса). Из теории надёжности известно, что более сложные системы менее надёжны. Применительно к демографии это означает, что более сложные организмы (с более высоким τ) должны быть менее надёжны, т.е. у них должны быть больше коэффициенты R (которые от возраста не зависят), а, следовательно, выше уровень смертности. Это относится только к модели

авторов поскольку у Гомперца R – число эмпирическое. Однако из формулы (5) следует, что с ростом τ параметр R уменьшается, что противоречит теории надёжности. Однако это противоречие вытекает из неявного предположения о независимости параметров μ_0^0 , t_0 , τ . Предположим обратное. Необходимо определить R как функцию τ в предположении, что корреляции Стрелера-Милдвана действительно существует. Из существования корреляции следует, что при возрасте t^* интенсивность смертности $\mu(t^*)$ не зависит от вариации параметров τ и R .

$$\mu(t^*) = R(\tau) \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right) / \left(\frac{t^*}{\tau}\right) \quad (6)$$

Следовательно, в точке t^* можно применить уравнение Лагранжа -Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0,$$

Использование уравнения Эйлера — Лагранжа [16] для нахождения экстремума функционала позволяет утверждать, что в случае, если (вариация интенсивности смертности по τ и R равна нулю, то гладкая функция может иметь экстремум, т.е.

$$\frac{d\mu(t^*)}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} \frac{\exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)}{\left(\frac{t^*}{\tau}\right)} + R \frac{\exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)}{\left(\frac{t^*}{\tau}\right)} \left(-\frac{t^*}{\tau^2}\right) + R \frac{\exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)}{\left(\frac{t^*}{\tau}\right)^2} \left(\frac{t^*}{\tau^2}\right) = 0 \quad (6)$$

Отсюда:

$$\frac{dR}{d\tau} = R \frac{t^*}{\tau^2} - R \frac{1}{\tau} \quad (7)$$

После интегрирования и с учётом начальных условий получаем:

$$R(\tau) = \frac{\mu^* t^*}{\tau \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)} \quad (8)$$

Из (8) следует, что параметр R становится функцией τ причём с ростом τ параметр R растёт, как и следует из теории надёжности. Таким образом опыт применение вариационных методов к корреляции Стрелера-Милдвана позволил представить интенсивность смертности как функцию только одного параметра – τ .

$$\mu_0(t) = \left[\frac{\mu(t^*) t^*}{\tau \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)} \right] \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right) / \left(\frac{t^*}{\tau}\right) \quad (9)$$

Параметры в формуле (9): $\mu(t^*)$, t^* , $C \equiv (\mu^* t^*)$ – параметры, которые не зависят от конкретной популяции. В свою очередь формула (9) показывает, что функция интенсивности смертности $\mu_0(t)$ зависит только от **одного**

«параметра» τ . В модели Гомперца $\mu_6(t)$ – функция двух параметров R и τ . Поскольку все остальные демографические функции – число доживающих, число умирающих и т.д., (кроме функции Мейкема) – можно выразить через центральную функцию демографии – интенсивность смертности, то это означает, что все математические модели базируются на одном единственном параметре τ – *средним (по популяции) периоде полового созревания*. Это существенно упрощает анализ таких моделей и открывает новые перспективы в исследованиях по демографии, позволяющих надеяться на достижение нового уровня понимания процессов, определяющих биологию продолжительности жизни.

Хотя за несколько прошедших десятилетий корреляция Strehler-Mildvan приобрела статус фундаментальной закономерности выживаемости организмов справедливой как для периодической, так и для групповой смертности [17, 12, 21] однако в литературе отмечаются отклонения от этой модели, и рассматриваются возможные причины этих отклонений [16, 17, 21], среди которых ограниченность уравнения Гомперца [20]. Эти результаты предполагают, что взаимодействие между старением и смертью более сложны, чем то, что обычно предполагается из Гомперца. Общим недостатком этих работ, вероятно, следует считать то, что сделанные в них выводы основаны на обработке данных общей смертности населения (т.н. «условных поколений») при игнорировании функции Мейкема – ее возрастной и исторической динамики. В тоже время функция Мейкема относится к наименее изученным явлениям в демографии, так в нашей стране таблицы функции Мейкема были впервые опубликованы в 1990 году (и с тех пор снова не публикуются). Однако исследования показывают, что пренебрежение этой функцией совершенно недопустимо, т.к. её вклад в общую смертность временами достигает 80%. Предложенный в [14] итерационный метод восстановления функции Мейкема остается к сожалению, малоизвестным. В результате остается непонятным, что вызывает изменения в фундаментальной закономерности Стрелера-Милдвана, связывающей параметры Гомперца.

Заключение.

Проведённое исследование можно считать чисто теоретическим выводом корреляции Стрелера-Милдвана базирующимся только на теории надёжности. Экспериментальное подтверждение теоретического предсказания в этом случае отходит на второй план и зависит в первую очередь от качества (надёжности и

достоверности) статистических демографических данных, на которые, к сожалению, часто накладывается политический фильтр.

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Makeham W.M. "On the law of mortality and the construction of annuity tables // J. Inst.Fctuaries. 1860, V8/ P.301-310
2. Gompertz B. "On the nature of the function expressive of the law of human mortality and a new mode of determining life contingencies"// Philos. Trans. Roy. Soc.London, A,1825. V.115. P.513-585.
3. Иванюк А.М., Данилов В.В. Анализ таблиц смертности в России за два столетия //Альманах современной науки и образования, 2014, №3, с.74-83
4. Finkelstein M., Discussing the Strehler-Mildvan model of mortality // Demographic Research. 2012 VOL.26, ARTICLE 9, P.191-206
5. Иванюк А.М., Данилов В.В. Математический анализ таблиц смертности для выявления динамических характеристик продолжительности жизни на основе метода уравнения баланса //Успехи современной биологии. 2001. Т.121, с.91 -109
6. Фролькис В.В. //«Успехи современной биологии, 1998.т.118.с441
7. Лазеры на красителях. Под ред. Шефера Ф.П. Мир, Москва. 1976. С.330 Dye Lasers Ed. By F.P. Schafer. Springer-Verlag, Berlin - New York.1973
8. Тихонов Е.А., Шпак М.Т. «Нелинейные оптические явления в органических соединениях», Наукова думка, 1979, Киев, с118. 384
9. Strehler B.L., Mildvan A.S. "General theory mortality and aging" Science. 1960 V.132 P. 14-21.
10. Гаврилов Л. А., Гаврилова Н. С. Биология продолжительности жизни. М.: Наука, 1991. 280 с.
11. Население России за 100 лет (1897-1997 гг.): статистический сборник / Госкомстат России. М., 1998. 222 с.
12. Население СССР. 1988: статистический ежегодник / Госкомстат СССР. М.: Финансы и статистика, 1989. 704 с.
13. Смертность и продолжительность жизни населения СССР. 1926-1927. Таблицы смертности. М. – Л.: Планхозгиз, 1930. 139 с

14. Иванюк А.М., Данилов В.В. Типы демографии, их отличия и следствия из них //Альманах современной науки и образования, 2014, №2, с.63-70
15. Иванюк А.М., Данилов В.В. Применение теории надёжности в демографических исследованиях //Альманах современной науки и образования, 2014, №4, с.76-79
16. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.
17. Кременцова А.В., Конрадов А.А. Историческая динамика распределения продолжительности жизни человека // Успехи геронтологии. 2001. Вып.8. С.14-20.
18. Халявкин А. В., Крутько В. Н. Подход к моделированию старения с позиций биофизики сложных систем // Труды ИСА РАН 2006. Т. 19, с 117
19. Li Ting & Anderson James J The Strehler–Mildvan correlation from the perspective of a two-process vitality model //A Journal of Demography Volume 2015. Vol.69, Issue 1 Pages 91-104
20. Tarkhov A.E., Menshikov L.I.,Fedichev P.O Strehler-Mildvan correlation is a degenerate manifold of Gompertz fit // Journal of Theoretical Biology 2017. Vol. 416, 7 , P.180-189
21. Yashin A. Begun . I., Iachine I. A., A. S. Mortality modelling: a review // Math. Population Studies. 2000. Vol. 8. № 4. P. 305–332.