

УДК 004.94

**КОНЦЕПЦИЯ ТРИАДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО, КОМПЬЮТЕРНОГО
И ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНОЙ ОЧЕРЕДИ**

Осипов Геннадий Сергеевич

д.т.н., зав кафедрой Информатики

Вашакидзе Нателла Семеновна

Филиппова Галина Викторовна

Рауш Наталья Леонидовна

ФГБОУ ВО «Сахалинский государственный университет»

Аннотация: Изложена методология анализа и решения сложной, практически значимой задачи исследования систем массового обслуживания с ограничением на длину очереди, рассматриваемой как единая проблема, включающую в себя три составные части – математическое, компьютерное и имитационное моделирование.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, методика компьютерного моделирования.

**THE CONCEPT OF A TRIAD OF MATHEMATICAL, COMPUTER
AND SIMULATION MODELING OF QUEUING SYSTEMS
WITH A LIMITED QUEUE LENGTH**

Osipov Gennady Sergeyevich

Vashakidze Natella Semyonovna

Filippova Galina Viktorovna

Rausch Natalia Leonidovna

Abstract: The methodology of analysis and solution of a complex, practically significant task of studying queuing systems with a limit on the length of the queue, considered as a single problem, including three components – mathematical, computer and simulation modeling, is presented.

Key words: queuing systems, computer modeling techniques.

Введение

Основной проблемой современного образования по-прежнему остается неполное использование возможностей комплексного синергетического подхода к изучению сложных систем и процессов. Необходимо на начальных стадиях формировать у обучающихся парадигму научных и практических навыков использования современных методов исследования поведения объектов, позволяющих проводить анализ их состояния и развития на различных уровнях и во взаимодействии со смежными направлениями и методами, подчиненными решению тех же задач и проблем.

Целью настоящего исследования является синтез методологических основ анализа стохастических дискретно-событийных систем массового обслуживания путем объединения воедино концептуально однородных методов их математического, компьютерного и имитационного моделирования. Таким образом формируется триада подходов к решению задачи, что позволяет синтезировать аддитивный эффект познания, изучения и прогнозирования поведения моделируемых систем.

Таким образом можно обеспечивать модернизацию современного образования за счет сведения в единую систему комплекс подходов к изучению природных, социально-экономических и технических систем, что позволит формировать у обучающихся актуализированный уровень мировоззрения и откроет возможности эффективного решения проблем в различных предметных областях.

Основы математического моделирования

Основной принцип функционирования систем массового обслуживания (СМО) с ожиданием и ограниченной очередью формулируется так: «если новая заявка поступает в момент времени, когда все места в очереди заняты, она покидает систему необслуженной, т.е. получает отказ».

Для моделирования СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди исходными данными являются:

λ – интенсивность входящего потока заявок, поступающих в систему (среднее число заявок, поступающих в единицу времени или среднее число событий, происходящих в единицу времени);

m – максимально допустимая длина очереди;

n – число каналов обслуживания;

$t_{\text{обс}}$ – среднее время обслуживания заявки в системе, или $\mu = (t_{\text{обс}})^{-1}$ – интенсивность потока обслуживания заявок.

Основные принципы моделирования

Одноканальные СМО

Пронумеруем состояния СМО по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 – канал свободен

S_1 – канал занят, очереди нет

S_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди

... ..

S_k – канал занят, $k-1$ заявок стоят в очереди

... ..

S_{m+1} – канал занят, m заявок стоят в очереди

На рисунке 1 представлен граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью.

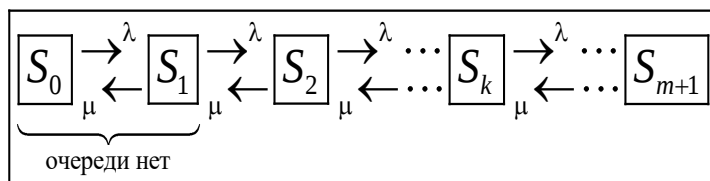


Рис. 1. Граф состояний одноканальной СМО.

Система переходит из одного состояния в следующее (соседнее) слева направо с интенсивностью λ , а обратно с интенсивностью μ .

Для определения основных показателей СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди базовой является величина интенсивности загрузки системы. $\rho = \lambda/\mu$.

Пусть p_i – вероятность того, что система находится в состоянии S_i ($i = \overline{0, m+1}$) (см. рисунок 1).

Очевидно:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \rho p_0 \\ p_2 = \rho^2 p_0 \\ \dots \\ p_k = \rho^k p_0 \\ \dots \\ p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 \end{array} \right.$$

Отсюда $p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1}$.

Тогда можно получить следующие зависимости:

$$1. \text{ вероятность простоя } p_0 = \left(\frac{1 \cdot (1 - \rho^{m+2})}{1 - \rho} \right)^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}},$$

$$(\rho = 1 \Rightarrow p_0 = (m + 2)^{-1});$$

2. вероятность отказа $P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}};$

3. относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}};$

4. абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda Q.$

Получим формулу для определения длины очереди (среднего числа заявок в очереди).

Так как в состоянии $S_i (i = \overline{2, m+1})$ в очереди находится $i-1$ заявка с вероятностью p_i , то, очевидно,

$$L_{\text{оч}} = \sum_{i=2}^{m+1} (i-1) p_i = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + (k-1) \cdot p_k + \dots + m \cdot p_{m+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } L_{\text{оч}} &= 1 \cdot \rho^2 p_0 + 2 \cdot \rho^3 p_0 + \dots + (k-1) \cdot \rho^k p_0 + \dots + m \cdot \rho^{m+1} p_0 = \\ &= \rho^2 p_0 [1 + 2 \cdot \rho + \dots + (k-1) \cdot \rho^{k-2} + \dots + m \cdot \rho^{m-1}] = \rho^2 p_0 \sum_{k=1}^m k \cdot \rho^{k-1} \end{aligned}$$

Представив выражение под знаком суммы в виде производной от ρ^k , получим:

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 p_0 \sum_{k=1}^m \frac{d}{d\rho} \rho^k.$$

Поменяем местами знаки суммы и производной и воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии со знаменателем ρ , тогда:

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 p_0 \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^m \rho^k = \rho^2 p_0 \frac{d}{d\rho} \frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho} = \rho^2 p_0 \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

Таким образом, длина очереди определится следующим образом:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}.$$

Многоканальные СМО

Рассмотрим n -канальную СМО с ожиданием, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность обслуживания μ (для одного канала), число мест в очереди m .

Состояния системы нумеруются по числу заявок, находящихся в системе:

- S_0 - все каналы свободны
- S_1 - занят один канал, остальные свободны
-
- S_k - заняты k -каналов, остальные свободны
-
- S_n - заняты все n -каналов, свободных нет
- S_{n+1} - заняты все n -каналов, одна заявка стоит в очереди
-
- S_{n+r} - заняты все n -каналов, r -заявок в очереди
-
- S_{n+m} - заняты все n каналов, m заявок в очереди

Граф состояний многоканальной СМО с ограничением на длину очереди приведен на рисунке 2.

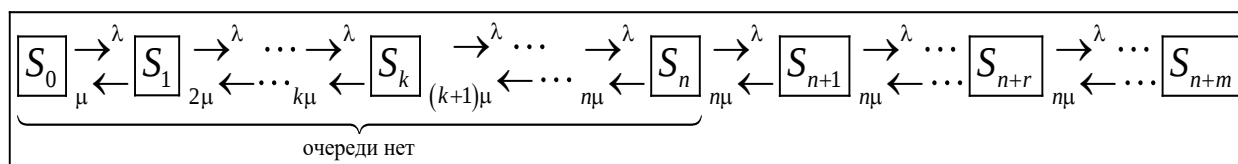


Рис. 2. Граф состояний многоканальной СМО

У каждой стрелки проставлены соответствующие интенсивности потоков событий. Причем по стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживаний, интенсивность которого равна μ , умноженному на число занятых каналов.

Очевидно, в данном случае:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \underbrace{\frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}}_{\text{убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем } \rho/n} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} \right)^{-1}.$$

И, соответственно

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)$$

Получим формулу для вычисления среднего числа заявок в очереди (выполнены преобразования, подобные тем, которые использовались при выводе аналогичного выражения для одноканальных систем (введено промежуточное обозначение $\phi = \rho/n$)):

$$\begin{aligned}
 L_{\text{оч}} &= 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + m \cdot p_{n+m} = p_0 \left[1 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + 2 \cdot \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \dots + m \cdot \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right] = \\
 &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \left[1 + 2\varphi + 3\varphi^2 + \dots + m\varphi^{m-1} \right] = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{r=1}^m r \cdot \varphi^{r-1} = \\
 &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \sum_{r=1}^m \frac{d}{d\varphi} \varphi^r = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{d}{d\varphi} \sum_{r=1}^m \varphi^r = \\
 &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{d}{d\varphi} \frac{\varphi(1-\varphi^m)}{1-\varphi} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{1-\varphi^m(m+1-m\varphi)}{(1-\varphi)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n} \right) \right]}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}.$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{СМО}} = L_{\text{оч}} + \bar{k},$$

$$\text{где } \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right) - \text{среднее число занятых}$$

каналов.

В таблицу 1 сведены основные показатели работы СМО с ограниченной по длине очереди.

Таблица 1

Показатели работы многоканальной СМО с ограниченной очередью

№		Наименование	Формула
1	p_0	Вероятность того, что система находится в состоянии S_0	$p_0 = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} \right)^{-1}$

Продолжение таблицы 1

2	$L_{оч}$	Среднее число заявок в очереди	$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left(1 - \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n} \right) \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2}$
3	$\bar{k}$	Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов)	$\bar{k} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)$
4	$L_{СМО}$	Среднее число заявок в системе	$L_{СМО} = L_{оч} + \bar{k}$
5	Q	Относительная пропускная способность	$Q = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$
6	A	Абсолютная пропускная способность системы	$A = \lambda Q$

Рассмотрим пример.

В порту имеется один специализированный причал. Интенсивность входящего потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время обработки одного судна составляет 2 суток. Найти показатели эффективности работы причала при неограниченной длине очереди и при условии, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если очередь полностью заполнена – в ней находится 3 судна.

Решение.

А. Длина очереди не ограничена ($m = \infty$).

Имеем:

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda \bar{t}_{обс} = 0,4 \cdot 2 = 0,8.$$

Вероятность того, что причал свободен:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Вероятность того, что причал занят:

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Среднее число судов, ожидающих разгрузки:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,2.$$

Среднее время ожидания разгрузки:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{3,2}{0,4} = 8 \text{ (сутки)}.$$

Среднее число судов, находящихся у причала (в СМО):

$$L_{\text{СМО}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4 \text{ (сутки)}.$$

Среднее время пребывания судна у причала:

$$T_{\text{СМО}} = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ (сутки)}.$$

В. Длина очереди ограничена ($m=3$)

Вероятность того, что причал свободен:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-0,8}{1-0,8^{3+2}} = 0,297.$$

Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки:

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 = 0,8^{3+1} \cdot 0,297 = 0,122.$$

Относительная пропускная способность причала:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,122 = 0,878.$$

Абсолютная пропускная способность причала:

$$A = \lambda Q = 0,4 \cdot 0,878 = 0,351,$$

Среднее число судов, ожидающих разгрузку:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m+1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)} = \frac{0,8^2 [1 - 0,8^3 (3+1 - 3 \cdot 0,8)]}{(1 - 0,8^{(3+2)})(1 - 0,8)} = 0,861.$$

Среднее время ожидания разгрузки:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,861}{0,4} = 2,153 (\text{сутки}).$$

Среднее число судов, находящихся у причала:

$$L_{\text{СМО}} = 0,861 + (1 - 0,297) = 1,564.$$

Среднее время пребывания судна у причала:

$$T_{\text{СМО}} = \frac{L_{\text{СМО}}}{\lambda} = \frac{1,564}{0,4} = 3,91 (\text{сутки}).$$

В таблице 2 приведены результаты расчетов показателей функционирования СМО с неограниченной длиной очереди и с длиной очереди не более 3 судов.

Таблица 2

Сравнение расчетов

Показатель	$m = \infty$	$m=3$
p_0	0,2	0,297
$P_{\text{отк}}$	0	0,122
Q	1	0,878
A	0,4	0,351
$L_{\text{оч}}$	3,2	0,861
$T_{\text{оч}}$	8	2,153
$L_{\text{СМО}}$	4	1,564
$T_{\text{СМО}}$	10	3,91

Очевидно, ограничение по длине очереди приводит к увеличению вероятности того, что причал свободен (простаивает) и отказа в обслуживании, но позволяет существенно снизить время пребывания судов в системе.

Компьютерное моделирование

Методологию и практическую реализацию принципов компьютерного моделирования СМО с ограниченной длиной очереди отработаем на двух примерах, имеющих практическую производственную направленность и значимость.

1. На оптовую базу прибывают автомашины с промышленными товарами. Интенсивность простейшего потока составляет $\lambda=1$ (автомобилей в час). На территории базы могут одновременно находиться не более 3-х машин, ожидающих разгрузки. Разгружают прибывающие машины 4 бригады грузчиков, причем среднее время разгрузки одной машины составляет 2,5 часа. Необходимо определить основные показатели СМО оптовой базы, если рабочий день составляет 8 часов.

Выполним компьютерное моделирование СМО в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica (WM) [1], которая является современной платформой символьного моделирования и, в частности, удобна тем, что в ней можно использовать обозначения, принятые в математической модели.

Исходные данные, необходимые для компьютерного моделирования приведены на рисунке 3.

n = 4;	(* Количество бригад (каналов обслуживания) *)
$\lambda = 1$;	(* Интенсивность входного потока (авто в час) *)
m = 3;	(* Ограничение на длину очереди*)
t_{обс} = 2.5;	(* Продолжительность обслуживания (час) *)
T = 8;	(* Продолжительность рабочего дня (час) *)

Рис. 3 Исходные данные для расчета показателей СМО

Результаты расчета основных предельных показателей функционирования СМО с ограничением на длину очереди, полученные в среде WM, приведены на рисунках 4 и 5.

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} T$$
 (* 1. Интенсивность потока обслуживания (за рабочий де
3.2

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} T$$
 (* 2. Интенсивность загрузки грузчиков *)

2.5

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! (1-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}$$
 (* 3. Вероятность простоя машин *)

0.0774763

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0$$
 (* 4. Вероятность отказа в обслуживании (P_{n+m})

0.0307863

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}$$
 (* 5. Вероятность обслуживания *)

0.969214

Рис. 4. Результаты предварительных расчетов

На рисунке 5 представлены показатели, характеризующие эффективность функционирования СМО.

$A = P_{\text{обс}} \lambda$	(* 6. Абсолютная пропускная способность системы*)
0.969214	
$n_3 = \rho P_{\text{обс}}$	(*7. Среднее число занятых обслуживанием каналов (бригад)
2.42303	
$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} \left(1 - (m+1) \left(\frac{\rho}{n} \right)^m + m \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m+1} \right)}{(n-\rho)^2 (n-1)!} P_0$	(* 8. Длина очереди *)
0.269688	
$L_{\text{СМО}} = L_{\text{оч}} + n_3$	(* 9. Среднее число заявок в системе (на базе) *)
2.69272	
$t_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$	(* 10. Среднее время ожидания в очереди*)
0.269688	
$t_{\text{СМО}} = t_{\text{оч}} + t_{\text{обс}}$	(* 11. Среднее время пребывания заявки в системе *)
2.76969	

Рис. 5. Результаты моделирования системы

2. Городской универсам получает овощи с интенсивностью 6 машин в день. В магазине работают 3 фасовщика, каждый из которых в среднем может обработать товар с одной машины в течение 4 часов. Продолжительность рабочего дня составляет 12 часов. Определить вместимость подсобных помещений для прибывающих машин, чтобы вероятность полной обработки продукции была не ниже 95%.

Исходные данные для моделирования этой задачи в WM представлены на рисунке 6.

```

n = 3; (* Количество фасовщиков (каналов обслуживания) *)
λ = 6; (* Интенсивность входного потока (в день) *)
tобс = 4; (* Время обслуживания (в часах) *)
T = 12; (* Продолжительность рабочего дня (часов) *)
m = 3; (* Вместимость подсобных помещений для прибывающих машин

```

Рис. 6. Задание исходных данных

На рисунке 7 приведены основные результаты компьютерного моделирования.

```

μ = 1 / tобс * T (* 1. Интенсивность потока обслуживания ( в рабочий день) *)
3

ρ = λ / μ (* 2. Интенсивность загрузки фасовщиков *)
2

P0 = 1 / (Σk=0n (ρk / k!) + (ρn+1 / (n! * (n-ρ))) * (1 - (ρ/n)m) ) (* 3. Вероятность простоя фасовщиков при m=3
81
665

Pотк = (ρn+m / (n! * nm)) * P0 (* 4. Вероятность отказа в обслуживании при m=3 ( Pn+m) *)
32
665

Pобс = N[1 - Pотк] // PercentForm (* 5. Вероятность обслуживания при m=3 *)
[численное при... [форма процента]
centForm=
95.19%

```

Рис. 7. Результаты моделирования

Имитационное моделирование

Для реализации имитационного эксперимента использовался пакет AnyLogic, который позволяет реализовывать все современные парадигмы имитационного эксперимента.

Логика модели, компоненты реализации системы дискретно-событийного моделирования, а также заготовки графиков представления результатов приведены на рисунке 8.

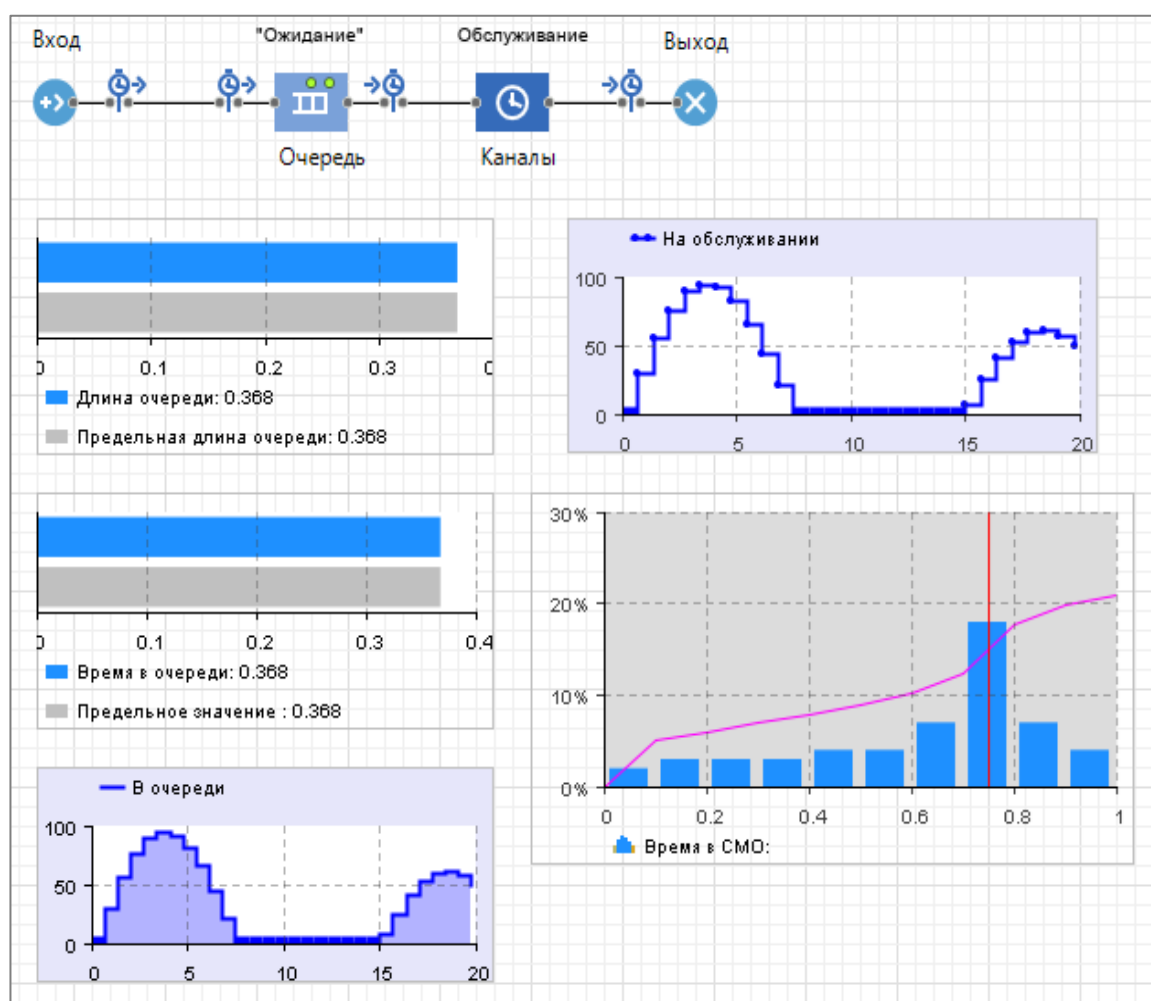


Рис. 8. Принципиальная схема модели

Состояние системы при реализации имитационного эксперимента в фиксированный момент времени представлены на рисунке 9.

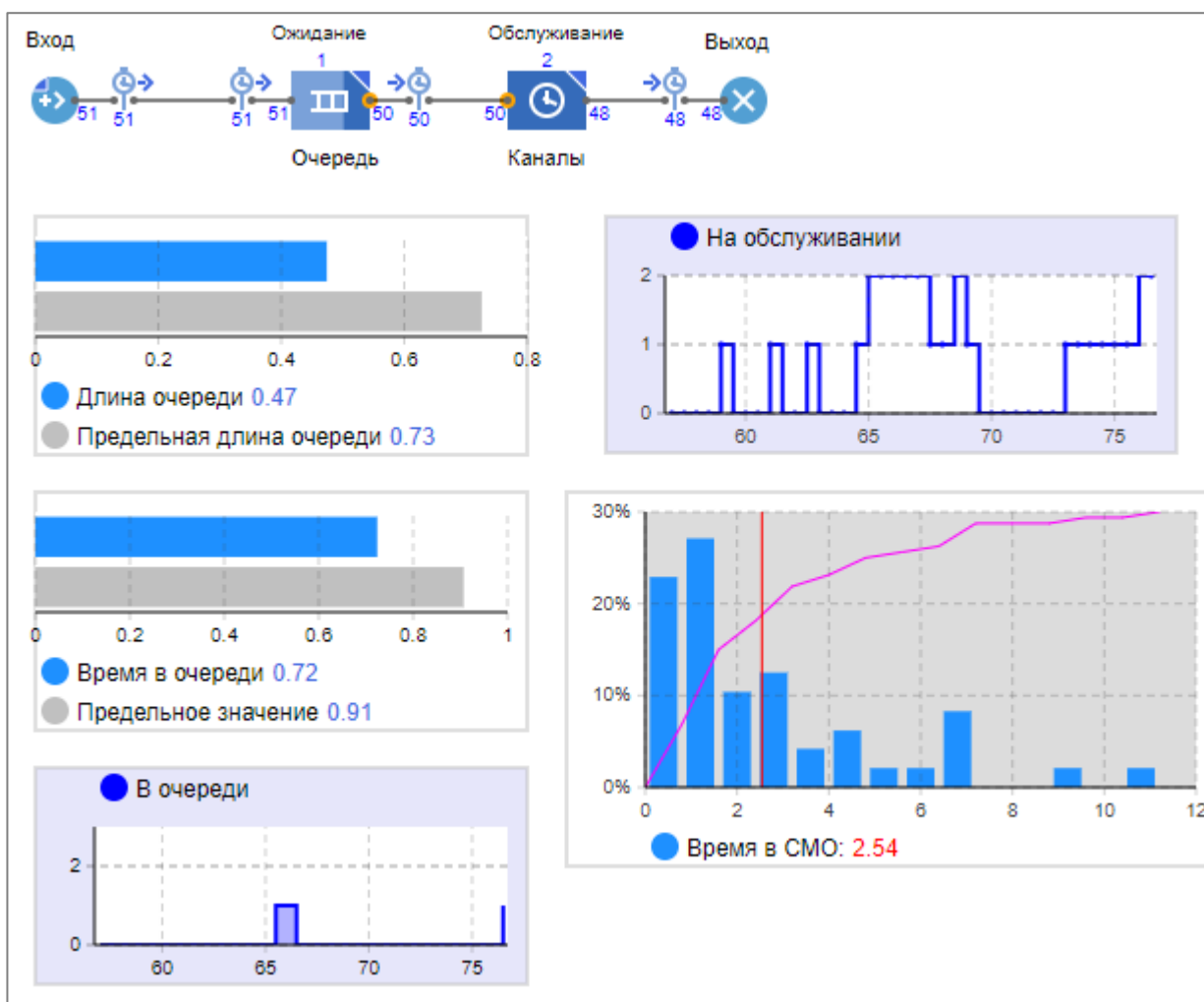


Рис. 9. Имитационный эксперимент

В данный момент в очереди находится одна заявка (максимально допустимая длина очереди равна трём), на обслуживании – две (оба канала обслуживания заняты).

Вместе с текущими параметрами состояния СМО выводятся и их предельные значения, полученные по формулам, приведенным в разделе «Основы математического моделирования». Например, текущая длина очереди составляет 0.47, а ее предельное значение равно 0.73. Кроме того, приведены статистические характеристики, например, продолжительности пребывания заявок в СМО.

Заключение

Изложена методология синтеза и доведена до практической реализации концепция исследования сложной проблемы моделирования систем массового обслуживания с ограниченной длиной очереди как триединой задачи, базирующейся на математической, компьютерной и имитационной моделях.

Список литературы

1. Stephen Wolfram. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. URL: <https://www.wolfram.com/language/elementary-introduction/2nd-ed/> (Дата обращения 17.02.2022).
2. Среда многоподходного моделирования. URL: <https://www.anylogic.ru/features/> (Дата обращения 21.02.2022).

© Г.С. Осипов, Н.С. Вашакидзе,
Г.В. Филиппова, Н.Л. Рауш, 2022