

НОВАЯ НАУКА

Международный центр
научного партнерства



NEW SCIENCE

International Center
for Scientific Partnership

А. Н. Никифоров

**АНАЛИТИКА СОСТОЯНИЯ
ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМЕ
НЕПРЕРЫВНОГО КОНТАКТА
РОТОРА СО СТАТОРОМ**

Монография

г. Петрозаводск
МЦНП «Новая наука»
2022

УДК 62
ББК 30
Н62

Автор:

Никифоров Андрей Николаевич

к.т.н., с.н.с., Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

Рецензенты:

Иванов А.В., доктор технических наук, АО «НПО Энергомаш им. академика В.П. Глушко»

Куменко А.И., доктор технических наук, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

Никифоров, Андрей Николаевич.

Н62 АНАЛИТИКА СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМЕ НЕПРЕРЫВНОГО КОНТАКТА РОТОРА СО СТАТОРОМ : монография / А. Н. Никифоров. – Петрозаводск : МЦПП «Новая наука», 2022. – 129 с. : рис., табл.

ISBN 978-5-00174-500-6

В монографии представлен исчерпывающий обзор теоретических и экспериментальных исследований самовозбуждения в различных вращающихся системах опасного безотрывного движения ротора по статору в результате случайного или периодического их контакта. Исследования по данной проблеме были начаты с простых моделей с однодисковым ротором и двумя степенями свободы, а теперь имеют дело с многотельными и трехмерными моделями из конечных элементов с несколькими точками контакта. Вместе с подробным описанием достижений более 100 авторов, выбранных по их результатам аналитического, численного и натурного моделирования, кратко поясняются различные методы решения системных уравнений и оригинальные модели контакта-трения. Наконец, предлагается план на будущее относительно того, чего не хватает в текущей исследовательской деятельности.

Рекомендуется инженерно-техническим и научным работникам, занимающимся расчетами и исследованиями в области динамики роторных машин и механизмов с малыми зазорами между вращающимися и неподвижными элементами.

УДК 62
ББК 30

ISBN 978-5-00174-500-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Основная часть.....	5
Начальные исследования / открытия 60-80-х гг.	6
Новаторские работы 90-х гг.	27
Прорывные исследования нулевых	42
Инновации 10-х гг.	61
Последние фундаментальные работы 20-х гг.	102
Заключительная часть (выводы и перспективы на будущее).....	108
Библиография.....	113

Предисловие

Роторы широко используются в технике, поскольку вращение обеспечивает отличный способ для передачи механической энергии из одной точки в другую или для преобразования движения в разных плоскостях через валы, шестерни, ремни и пр. Компоненты вращающихся машин и механизмов, помимо ротора, включают подшипники и опорную конструкцию (статор). Между ротором и статором имеется рабочий зазор, значительно влияющий на общее динамическое поведение системы, особенно в случаях его случайной и периодической выборки. Контакт ротора со статором возможен из-за производственной ошибки, чрезмерного дисбаланса, потери устойчивости, несоосности, износа подшипников и плохой сборки. Контактное движение может быть прерывистым (виброударным) или безотрывным и в то же время прямым или обратным. Прямое контактное движение представляет собой вынужденную прецессию и простое (чистое) скольжение, а обратное – обкатывание и самовозбуждающуюся прецессию. При систематическом и постоянном чистом скольжении угловые скорости вращения ω и прецессии Ω синхронны (совпадают по величине и направлению). При периодической и непрерывной обкатке скорость Ω не равна и направлена против скорости ω , т.е. $-\Omega \neq \omega$. Сила контактного трения μN всегда действует против общей (относительной) линейной скорости $V_{\text{rel}} = \omega r \pm \Omega \delta$, где μ - коэффициент кулоновского трения, N , r и δ - сила нормального давления, радиус ротора и зазор между ним и статором в месте контакта. Совершаемая силой контактного трения работа $A_{\mu N} = -\mu N \Omega \delta \text{sign}(V_{\text{rel}})$. При прямом контактном движении $\Omega > 0$, $V_{\text{rel}} > 0$ и совершается отрицательная работа $A_{\mu N} < 0$, т.е. сила μN рассеивает энергию роторной системы. При обратном контактном движении $\Omega < 0$ и при отрицательной $V_{\text{rel}} = \omega r - \Omega \delta < 0$ будет $A_{\mu N} < 0$, но при положительной $V_{\text{rel}} = \omega r - \Omega \delta > 0$ будет $A_{\mu N} > 0$. В последнем случае сила контактного трения увеличивает энергию роторной системы, в частности колебания напряжений растяжения-сжатия внутри прецессирующего ротора. Таким образом, обратное контактное движение намного опаснее с позиции усталостного разрушения.

Основная часть

Динамика ротора с задеванием за статор всегда привлекала внимание многих исследователей с середины прошлого века. Наиболее обсуждаемыми (цитируемыми), конечно, являются работы пионеров новых задач и решений по обозначенной проблеме. Ниже они, а также несправедливо, по мнению автора данных строк, слабо популяризованные, как опубликованные на русском и английском или переизданные на этих двух международных языках в переводе с национальных научных первоисточников, обзревается в хронологическом порядке.

При аналитическом обзоре не везде сохранена оригинальная терминология авторов, поскольку для передачи сути и ясного понимания соответствия между приводимыми не всегда одинаковыми результатами нужны общепринятые научно-инженерные термины. Например, вместо часто встречающихся, но неоднозначных понятий: «обратная прецессия», «асинхронный обкат», «backward whirl», «dry-friction whip» и «full annular rub», в качестве аналогов-синонимов всюду подразумевается, что:

чистое скольжение = синхронное скольжение =

= synchronous full annular rub;

чистое качение = обкатка без проскальзывания =

= backward rolling = dry-friction whirl;

качение со скольжением = обкатка с проскальзыванием =

= backward slip(ping) = dry-friction whip;

виброударное движение = partial rub;

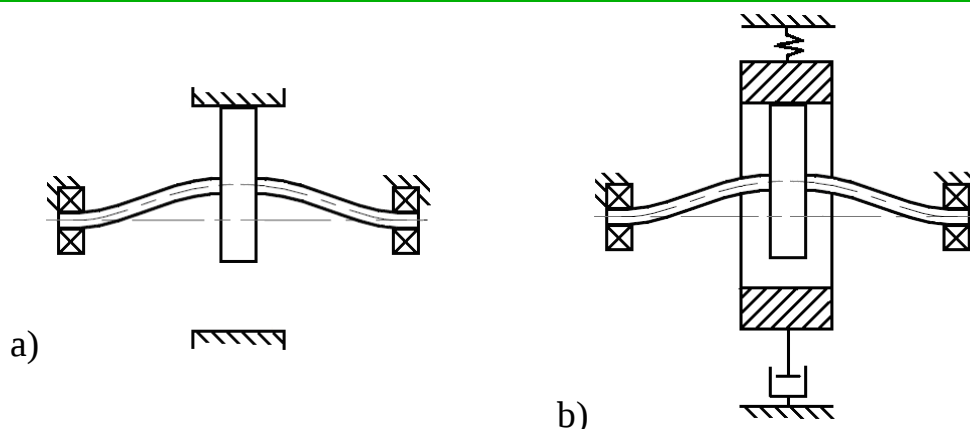
прецессия = whirl;

изгиб = whip.

Начальные исследования / открытия 60-80-х гг.

Вклад Банах [Банах, 1965] в развитие контактной теории роторов является одним из первых фундаментальных и значительных. Опытным путем выяснено, что даже при малых угловых скоростях ω гибкого, неуравновешенного, вертикального или горизонтального вала, опирающегося на два жестких подшипника, один из которых имеет зазор, устанавливается режим с ударами; при дальнейшем увеличении ω , причем задолго до критической скорости, возникает режим безотрывного движения – либо синхронного с ω скольжения (при обильной смазке), либо асинхронного обкатывания (при недостаточной смазке) ротора по опоре с зазором; при ещё больших скоростях может снова происходить режим с систематическими ударами вала о подшипник. При этом показано, в т.ч. аналитически методом малого параметра на основе уравнений, соответствующих классической модели ротора Джеффкотта* с абсолютно жестким ограничителем прогиба (рис. 1, а), что обкатка при сравнительно больших числах оборотов не является чистым качением, а сопровождается постоянным проскальзыванием в сторону вращения вала. Вместе с тем теоретически определены пределы устойчивости режима обкатывания.

*На самом деле Джеффкотту [Jeffcott, 1919] необоснованно присваивается «благодаря» англо-американским исследователям заслуга в разработке симметричной однодисковой модели ротора, поскольку в 1870-х годах Густав де Лаваль продемонстрировал такой ротор на упругих опорах, который впоследствии был аналитически исследован Фёплом [Föppl, 1895].



**Рис. 1. Динамическая модель ротора Джеффкотта
с жестким (а) и подвижным (б) статором**

Помимо этого, используя классическую ньютоновскую теорию мгновенного удара, установлено, что при режимах с ударами их число за одно прецессионное движение (за полный оборот оси) вала может быть любым в зависимости от начальных условий, но в случае неравножесткого крепления опоры с зазором режимы с ударами представляют собой двухударное движение. Устойчивое движение с ударами вала о подшипник, происходящими только в двух диаметрально противоположных точках в плоскости наибольшей жесткости подшипника, выявлено и в экспериментах.

В [Billett, 1965] теоретически и экспериментально проанализирован симметричный случай опоры на два подшипника скольжения, в котором орбитальное движение гибкого, сбалансированного вала внутри подшипниковых зазоров имеет место одновременно с явлением сухого трения. Биллетт, по-видимому, впервые, показал, что скорость обкатывания Ω с нарастанием скорости вращения ω приближается к критической скорости вала на беззазорных опорах $\tilde{\lambda}$ и не превышает её. Причем, чем ближе в его модели Ω к $\tilde{\lambda}$, тем больше проскальзывание и по аналогии с классическим резонансом прогиб вала. Когда $\omega < \tilde{\lambda}\delta/r$, где r - радиус вала, δ - зазор

в подшипниках, то выполняется известное отношение $\Omega = \omega r / \delta$, сопряженное с предрезонансным чистым качением. Конструкционное демпфирование системы повышает необходимый для поддержания обкатки коэффициент контактного трения и уменьшает максимально достижимую скорость обкатывания и амплитуду обратной прецессии вала. Опыты автора с горизонтальным валом подтвердили упомянутые факты, что говорит о слабом влиянии силы веса на режим обкатки. Вместе с тем обкатывание вала с горизонтальной осью вращения не всегда самовозбуждалось. При низких частотах вращения вал «качался» в подшипниках, при высоких угловых скоростях самоустанавливалась обкатка, а при средних ω оба этих режима были устойчивыми. В этом случае переход от качания к обкатке происходил либо при снижении числа оборотов, либо при ударном воздействии на систему.

Эрих и О'Коннор [Ehrich, 1967] видимо первыми для анализа влияния вибрации статора на динамику ротора не без оснований предложили двухмассовую модель, в которой одна масса есть ротор, другая – статор (рис. 1, б). При этом они рассчитали АЧХ ротора и статора в виде функции относительных частот их собственных колебаний и отношения величины зазора к величине роторного дисбаланса. Получилось, что зазор приводит к затягиванию резонансных колебаний системы при прохождении её критической скорости, которая в случае принятой модели равна основной собственной частоте системы без зазора:

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{k + k_s}{m + m_s}}, \quad (1)$$

где k и m – поперечная жесткость и масса ротора, k_s и m_s – жесткость крепления и масса статора. При закритических скоростях вращения возможно либо бесконтактное движение ротора внутри статора, либо их безотрывное синхронное движение, которое имеет некоторое сходство с поведением «хула-хупа». Выявленная прецессия статора происходит с гораздо большими

амплитудами, чем это можно было бы ожидать при беззазорном соединении или при очень большом зазоре. При угловых скоростях ротора, равных собственной частоте статора, а также при ещё более высоких числах оборотов, может возникать скачок амплитуды. Последнее связывается с существованием отдельных ветвей устойчивой работы и реализуемо в случае воздействия на систему внешних возмущений. Кроме того, численное решение данной задачи с учетом сухого трения в зоне контакта и конструкционного демпфирования внутри ротора и статора показало, что совокупная диссипация по существу не изменяет общей картины наблюдаемых явлений.

Блэк [Black, 1968] рассматривает неуравновешенный гибкий ротор и упругозакрепленный жесткий статор как систему со многими степенями свободы (рис. 2), а также полные механические импедансы ротора и статора как несвязанных систем и как объединенных в одно целое. Вводя уравнение «неотрывности» ротора от статора и используя выражения импедансов, Блэк определяет силу их контактного взаимодействия Q и несколько диапазонов скоростей вращения, когда Q положительна, т.е. когда достижимо безотрывное движение системы, в зависимости от отношения радиуса прецессии ротора ρ к величине зазора δ , импеданса беззазорной системы «ротор-статор» $\bar{z}(i\Omega)$, фазового сдвига ψ этого импеданса относительно Q и угла контактного трения γ . Это позволяет ему выявить связь амплитуд контактных прецессий ротора и статора, в т.ч. при их соприкосновении при неочевидном условии $\rho < \delta$, с их собственными частотами и частотами собственных колебаний системы «ротор-статор» при отсутствии зазора. Его динамический анализ системы с конструкционным демпфированием и контактным трением показал, что совокупная диссипация мало изменяет зоны синхронного скольжения, которые, в общем, берут своё начало чуть ниже частот изолированного ротора и распространяются вплоть до частот ротора, сцепленного со статором, и что она заметно сужает области с аналогичным движением, ограниченные собственными частотами статора и системы «ротор-статор» без зазора. Вместе

с тем соотношение между конструкционным демпфированием и контактным трением сильно влияет на диапазоны асинхронного обкатывания, которые как оказалось, в общем располагаются внутри упомянутых частотных полос. В каждом таком диапазоне качение может быть как чистым с угловой скоростью $\Omega = \omega r / \delta$, так и скользящим с Ω стремящейся к $\tilde{\lambda}$ или $\tilde{\lambda}_i$. Существование того или другого режима обкатки с той или иной скоростью Ω определяется переменной ψ относительно постоянной γ , причем в общем случае введенная Блэком функция $\psi(\bar{z})$ характеризуется U-формой. Важно отметить, что ему, по-видимому, впервые, удалось рассчитать значения частоты обкатки, согласующиеся с экспериментальными данными.

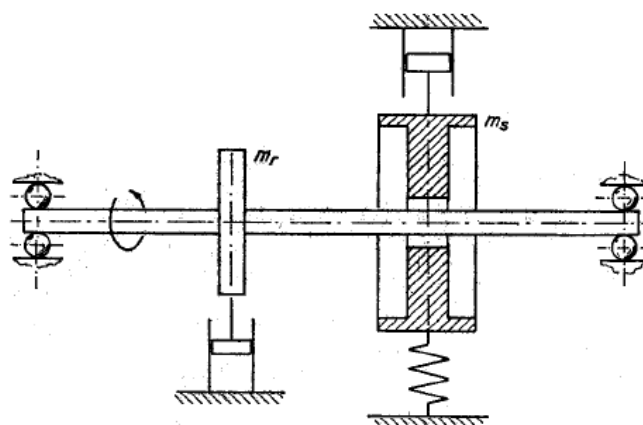


Рис. 2. Динамическая модель ротора со статором Блэка

Проводя теоретический анализ модели (рис. 1, b) и проверочные эксперименты, Эрих вывел критерий устойчивости контактных, несинхронных с частотой вращения прецессионных движений ротора и статора [Ehrich, 1969]. Исходя из баланса сил системы, получена простая формула, определяющая угловую скорость обкатывания Ω в зависимости от отношения коэффициентов демпфирования и отношения собственных частот ротора и статора, в которую не входит скорость вращения. Согласно формуле, диапазон действительных

скоростей Ω и, следовательно, устойчивости обкатки в системе «ротор-статор» расширяется при сближении констант конструкционного демпфирования ротора и статора, а также при расхождении их собственных частот. При этом обкатка в системе с одинаковыми собственными частотами ротора и статора всегда неустойчива, т.е. не возможна. Система с большим статорным демпфированием может безотрывно кружиться с частотой собственных колебаний ротора, а система с большим роторным демпфированием – с собственной частотой статора.

Обозревая публикации на тему контактного взаимодействия ротора со статором, в т.ч. вышеупомянутые, Димарогонас и Шандор [Dimarogonas, 1969] уделяют большое внимание «эффекту трущегося уплотнения». Трение ротора либо о сальник, либо о кольцевой дроссель приводит к их постепенному нагреву и искажению и, как следствие, к увеличению дисбаланса ротора. Однако авторы указывают, что колебания ротора, вызываемые растущим из-за трения тепловым дисбалансом, нарастают при скоростях вращения ниже критической и затухают в закритическом диапазоне. Это объясняется известным свойством самоцентрирования гибкого вала с диском – переходом фазового угла между возмущающей силой (дисбалансом вследствие теплового отклонения) и динамическим прогибом через 90° . Отмечается, что термическая стабилизация многодискового ротора при трении о статор наблюдается выше критических скоростей, когда фазовый угол достигает 120° , и до очередного антирезонанса (рис. 3), т.е. до момента развития моды следующей критической скорости. По их мнению, контактные силы трения непосредственно значительно влияют на поведение роторной системы при небольших частотах вращения, тогда как при высоких скоростях выделение тепла обычно велико, и связанные с ним изгибающие силы оказывают преобладающее воздействие на систему по сравнению с силами трения.

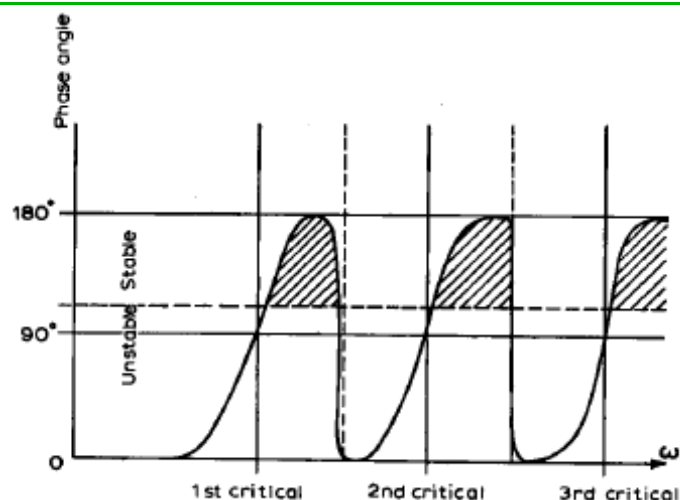


Рис. 3. Диапазоны самоцентрировки роторов со многими степенями свободы (заштрих.)

Денисов с соавторами [Денисов, 1973] рассмотрели виброударное движение, а также явление перехода ротора Джеффкотта в чистое качение (обкатку без проскальзывания) по жесткому статору при различных начальных условиях. Режимы движений ротора в зависимости от его исходных скоростей и радиального отклонения исследованы с помощью фазового пространства системы и метода точечных отображений. Получено, что если ротору, имеющему малую нормальную скорость и задевающему статор, придать скорость обратного прецессионного движения большую по величине, чем $\lambda = \sqrt{k/m}$, то ротор, совершив конечное число ударов о статор, может войти в режим обкатки по нему. Пороговая скорость прецессии возрастает с увеличением конструкционного демпфирования и уменьшением контактного трения. Кроме того показано, что скорость вращения роторов с осевыми моментами инерции $I_0 \gg mr^2$, где r – радиус ротора в месте контакта, мало меняется за время выхода на обкатку.

Бегг при выдвижении своей теории [Begg, 1974] отметил ряд фактов относительно взаимодействия реального гибкого ротора с упорным, а также

радиальным подшипником, имеющим зазор. На рис.4,a,b показана классическая первая форма собственных колебаний консольного ротора, когда его поперечный прогиб возникает одновременно с угловым перекосом, которые ограничиваются корпусом. Если торцевой контакт и изогнутая ось ротора находятся на одной стороне от оси прецессии, то возбуждается обратное прецессионное движение ротора (рис. 4, а). Если такой контакт происходит на противоположной стороне ротора, то его прецессия будет прямой (рис. 4, b). На рис. 4, с представлена маловероятная вторая форма колебаний ротора. Если эта форма всё же возбуждается, например, когда скорость неуравновешенного ротора близка ко второй критической, то направление контактного прецессионного движения будет противоположно направлению первой формы.

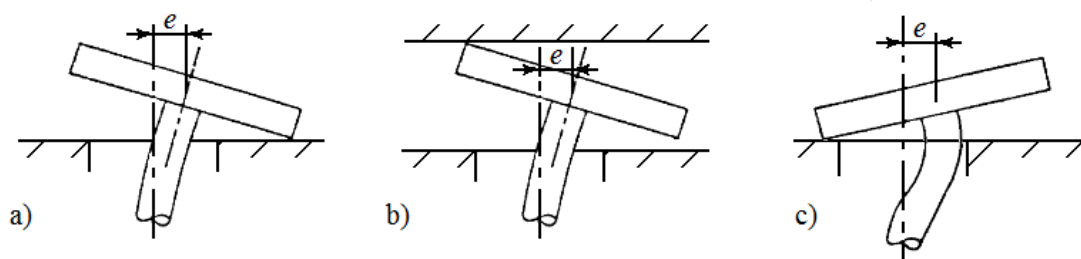
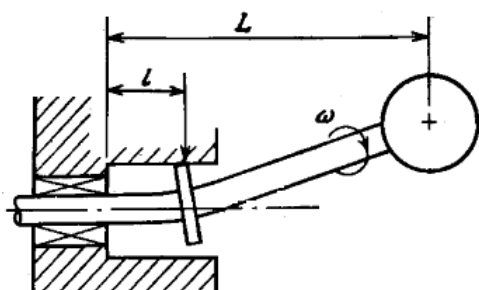


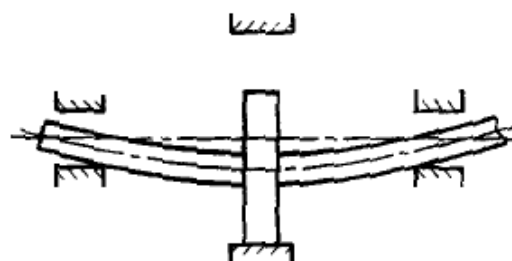
Рис. 4. Торцевой контакт гибкого ротора с упорным подшипником

Если плоскость радиального подшипника совпадает с плоскостью центра тяжести ротора, то амплитуда его прецессионного движения не будет превышать величину зазора. Однако в общем случае радиальный контакт в одной плоскости может вызвать большую амплитуду прецессии в другой. Чтобы исследовать поведение ротора в случае удаленного расположения его центра масс от плоскости контакта, Бегг предложил расчетную модель с двумя степенями свободы (рис. 5). При этом понятие «динамическая устойчивость» в его работе отличается от того, что под этим обычно подразумевают. Он считает любое вызванное контактным трением прецессионное движение

неустойчивым, вне зависимости от того, увеличивается или сохраняется постоянной его амплитуда. Термин «устойчивость» относится к динамическому прогибу ротора, который полностью затухает после исчезновения вызвавшего его возмущения. Определяя мощность, производимую контактным трением, и мощность, рассеиваемую конструкционным демпфированием, он отыскал критерий такой устойчивости в зависимости от соответствующих коэффициентов трения, характеристик жесткости, массы и скорости прецессии ротора.



**Рис. 5. Динамическая модель
ротора со статором Бегга**



**Рис. 6. Динамическая модель
ротора со статором Олимпиева**

Олимпиев [Олимпиев, 1976] свел дифференциальное уравнение скольжения / обкатки двухопорного, симметричного, гибкого ротора в жестком статоре (рис. 6) с учетом внутреннего трения в материале ротора к дифференциальному уравнению интегральных кривых. Полученные им характерные кривые на развертке фазового цилиндра означают то, что асинхронное обкатывание может осуществляться в форме обратной, в т.ч. без скольжения, и «заторможенной» прямой прецессии. При этом он отмечает, что предельный цикл, соответствующий обкатке последнего типа и сопровождающийся циклическим изменением скорости оси ротора, неосуществим без внутреннего трения, т.е. возможен только у ротора с внутренним трением.

В [Денисов, 1979] авторы расширяют собственные исследования [Денисов, 1973], обратившись к рассмотрению контактного движения ротора Джеффкотта со статором пренебрежимо малой массы, упругозакрепленным и лишенным демпфирования. Полагая, что при таких условиях в системе не существуют стационарные ударные режимы, они анализируют, в т.ч. методом счета в обратном времени, фазовые пространства (области) свободного движения в пределах зазора, скольжения/обкатки и чистого качения ротора, а также переходы, в т.ч. бифуркационные, одних таких движений в другие. В результате делается важный для практики вывод. Может быть выбрана такая жесткость крепления статора, что режим устойчивого скольжения/обкатывания не будет существовать, т.е. при любых возмущениях ротор будет возвращаться к состоянию невозмущенного (свободного) вращения.

Взаимодействию простейшего ротора (рис. 1, а) с абсолютно жестким статором при действии на ротор постоянной силы, например его веса, посвящена работа Сандалова и Цветкова [Сандалов, 1979]. Такого рода нагрузка нарушает симметрию контактной задачи, что и показывают авторы, рассматривая фазовое пространство системы как четырехмерное в координатах $\rho, \dot{\rho}, \psi, \dot{\psi}$, где ρ – радиальное смещение ротора, ψ – угол прецессии его оси. Путем варьирования системных параметров и начальных условий они получили устойчивый предельный цикл, соответствующий сложному периодическому движению ротора (рис. 7), которое состоит из его безотрывного скольжения / обкатывания AB , свободного перемещения в пределах зазора BC и движения с ударами в точках C, C_1, C_2 и так далее.

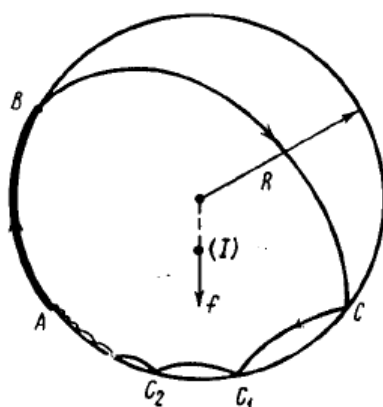


Рис. 7. Безотрывное AB , свободное BC и ударные CC_1 , C_1C_2 и т.д. периодические движения ротора, нагруженного постоянной силой

Чайлдс [Childs, 1979], используя модель Джеффкотта и метод малого параметра, показал, что окружные изменения жесткости ротора, обусловленные его задеванием за жесткий статор на некоторой части орбиты ротора, могут приводить к параметрической неустойчивости типа Матье-Хилла – к возбуждению прецессионного движения ротора с половинной частотой, если частота вращения близка к удвоенной собственной частоте ротора. При этом рассмотрены два различных (с математической стороны описания) источника такого параметрического резонанса ротора. Сила нормального давления ротора на статор, представленная в виде разложения в ряд Фурье, и тангенциальная сила, соответствующая кулоновскому трению. В ходе анализа влияния внешнего вязкого демпфирования выяснено следующее. Оно сужает полосу частот неустойчивого вращения в окрестности $2f_0$ (удвоенной собственной частоты ротора). Достаточно высокое демпфирование полностью устраняет неустойчивость. По мере отстройки частоты вращения от $2f_0$, а также при уменьшении контактной жесткости статора и коэффициента кулоновского трения происходит снижение уровня демпфирования, необходимого для обеспечения устойчивости.

Работа Келленбергера [Kellenberger, 1980] посвящена количеству и влиянию тепла, выделяющегося и частично передающегося ротору в результате его трения об уплотнительное кольцо. Нагрев не является равномерным как по длине, так и по окружности ротора, что искажает его. Возникающий тепловой дисбаланс постепенно перемещается вдоль окружности ротора и может постоянно возрастать. Это вызывает спиральную траекторию вектора-смещения ротора в синхронно вращающейся системе координат (спиральную синхронную вибрацию ротора). Предложенная система уравнений применима не только к кольцевым уплотнениям, но и к статору, трущемуся о ротор и опирающемуся на демпфированные упругие опоры. Исходя из приближенного аналитического, в частности считая параметры тепловых потоков малыми величинами, и численных решений задачи об изменении радиального отклонения ротора во времени, выявляется ряд закономерностей. Динамическая неустойчивость рассматриваемой системы, определяющаяся как «расходящаяся» спираль, зависит только от отношения теплового потока Q_p , поглощаемого ротором, к тепловому потоку Q_q , отводимому из ротора. Скорость выписывания (период) спирали зависит только от Q_p и варьируется от $\frac{1}{4}$ до 5 ч. Направление выписывания спирали в первом приближении определяется параметрами уплотнительного кольца (статора) и критической скоростью ротора, а не Q_p и Q_q , и обычно противоположно вращению ротора. Однако оно сменяется на обратное при достаточно высоких значениях демпфирования и инерции кольцевого уплотнения (статора).

Чайлдс [Childs, 1982] показал, что прецессия ротора со скоростью $\frac{1}{2}$ скорости вращения в случаях, когда радиальная жесткость ротора претерпевает периодические снижения из-за несимметричных зазоров в подшипниках или систематические повышения вследствие задевания за статор на части орбиты движения ротора, может быть описана линейной или нелинейной теорией колебаний. А именно, либо на основе анализа явления параметрического возбуждения колебаний в линейной системе, либо на основе анализа

устойчивого субгармонического движения нелинейной системы. Однако возможность более редкой вибрации ротора с частотой, равной $\frac{1}{3}$ частоты вращения, объясняется нелинейностью радиальной жесткости. В работе относительное изменение радиальной жесткости ротора ε считается малым по сравнению с единицей и используется метод возмущений. Практическую ценность работы определяют приведенные простые условия для динамической устойчивости системы. Чем больше ε и/или протяженность того участка траектории ротора, в пределах которого происходит повышение или снижение жесткости, тем шире зона неустойчивого вращения ротора в окрестности его удвоенной и/или утроенной критической скорости. Кулоновское трение μN приводит к существенному расширению диапазона скоростей, в пределах которого вращение может оказаться неустойчивым. Кроме того, выведенные аналитические соотношения указывают на эффект повышения собственной частоты ротора в моменты его задевания за статор, а также на эффект сохранения прецессионного движения ротора с половинной частотой при увеличении скорости вращения, который в равной мере является следствием возрастания эффективной жесткости ротора и влияния кулоновского трения.

Чжан [Zhang, 1982], взяв за основу модель Бегга, провел прямо противоположное исследование. Он вывел уравнения, определяющие частоты и формы устойчивых непрерывно-контактных прецессий ротора. Полученные с учетом малого конструкционного демпфирования результаты показывают, что циклическая частота обката всегда выше критической скорости ротора, свободного от контакта со статором.

Экспериментально-аналитическому исследованию влияния длины дуги контакта между ротором и статором на вибрацию системы посвящена замечательная работа Битти [Beatty, 1985]. Он показал, что реальные осциллограмма и частотный спектр, возникающие в результате их периодического контакта в пределах некоторой части длины окружности ротора, могут быть воссозданы соответственно в виде теоретического закона

изменения виброперемещений ротора и разложения в ряд Фурье принятого закона. Анализ относительной интенсивности гармоник различных вибрационных сигналов (расчетного и опытных в т.ч. из практики эксплуатации) позволил ему постулировать следующее. По мере расширения пятна контакта на периферийной окружности ротора происходит снижение амплитуды синхронных с частотой вращения колебаний и рост амплитуд высших гармоник, причем вторая гармоника по амплитуде остается больше, чем третья, третья – больше, чем четвертая и т.д. Наоборот, если амплитуды высших гармоник уменьшаются с течением времени, то идёт процесс приработки ротора, т.е. он продолжит работать безаварийно. Если длина дуги контакта на роторе достигает 360° , высшие гармоники исчезают. В условиях этого и вращения на закритической скорости рано или поздно (с увеличением контактного трения) возникает разрушительная обратная прецессия ротора с частотой близкой к критической, вычисленной с учетом повышения жесткости ротора за счет «опоры» на статор. Задевание ротора за статор получается слабым и неопасным, если вышеупомянутая дуга составляет менее 270° , т.е. если амплитуды второй и третьей гармоник не превышают соответственно 75 и 50% амплитуды синхронной компоненты сигнала. Данные результаты Битти рекомендует инженерам как метод обнаружения задеваний роторов за статорные элементы и прогрессирования взаимодействия между ними.

Позняк [Позняк, 1987], опираясь на опыт эксплуатации роторных агрегатов, развивает точку зрения о том, что выход ротора на асинхронное обкатывание им статора сопровождается значительным падением скорости вращения, т.е. резким торможением ротора. Вначале он подробно описывает разрушение реального достаточно длинного, многоопорного ротора – валопровода – с ярко выраженным силовым характером, преимущественно с деформациями кручения. А затем на примере двухдисковой модели валопровода выявляет физические закономерности явления «крутильного удара», связанного с резким торможением одного из дисков, трущегося о

статор. Выведенные уравнения скольжения / обкатывания решены численно при начальных радиальных и угловых перемещениях и скоростях в предположении, что контакт является абсолютно неупругим и поперечные колебания в валопроводе затухают мгновенно. Получены три режима движения: простое торможение или чистое скольжение, возникающее при малых коэффициентах трения μ ; скольжение с отрывом, существующее при средних μ и малых значениях неуравновешенности, близких к предельному, при котором ещё происходит задевание ротора за статор; чистое качение, реализуемое при больших μ . В результатах расчетов следует отметить то, что скорость вращения в момент начала режима качения снижается почти вдвое по сравнению с первоначальной, а сила нормального давления возрастает до величины в несколько тысяч раз большей исходной неуравновешенной силы. При этом, максимальный крутящий момент превышает на два порядка вращающий и примерно в 6 раз момент, при котором касательные напряжения в рассматриваемом валопроводе оказываются равными пределу прочности на кручение. После выхода на асинхронное обкатывание нормальная сила и крутящий момент изменяются во времени по затухающей синусоиде с частотой, равной приблизительно частоте крутильных колебаний системы. Таким образом, есть все основания интерпретировать описанное явление как крутильный удар.

Чой и Ноэх [Choi, 1987] предложили численный метод расчета установившихся нелинейных колебаний ротора, обусловленных существованием зазора и задеванием ротора за статор. В основу метода положены метод гармонического баланса, прямое и обратное дискретные преобразования Фурье, а также итерационная процедура. Обнаружено, что в случае действия на ротор незначительной боковой постоянной силы, например его веса, движение ротора может быть некруговым и носить характер субгармонических и супергармонических колебаний. Выявлены субгармонические резонансы 2-го и 3-го порядка соответственно при $\omega/\lambda=2$ и

$\omega/\lambda=3$, а также супергармонический резонанс 2-го порядка в окрестности $\omega/\lambda=1/2$. Также отмечено, что с увеличением коэффициента трения о корпус уменьшается основной резонансный пик ротора, но это может приводить к хаотическим (непериодическим) вибрациям. Чем больше эксцентриситет, тем большее влияние он оказывает на колебания ротора в горизонтальном направлении по сравнению с вертикальным. Конструкционное демпфирование ожидаемо уменьшает или совсем исключает субгармонические резонансные пики.

Чой в соавторстве с Падованом [Choy, 1987] рассмотрел возможные стадии переходного движения ротора Джеффкотта – до, во время и после нескольких актов задевания им неподвижного статора при внезапной его разбалансировке в предположении постоянства скорости вращения. Это бесконтактное вращение, начальное (ударное) и развитое (безотрывное) взаимодействие и выход из него. При этом численно проанализировано влияние на эти процессы коэффициента трения μ и упругости контактных поверхностей, дисбаланса ротора и конструкционного демпфирования в его опорах. Отмечено, что безотрывное взаимодействие может иметь три фазы – чистое скольжение, которое продолжается пока скорость прецессии $\dot{\psi} > 0$, комбинацию скольжения и качения, пока $\dot{\psi} + \omega > 0$, чистое качение, когда $\dot{\psi} = -\omega$. Кроме того – при выходе из скольжения и/или качения ротор начинает возвращаться к прямому прецессионному движению, но в случае если угол входа в контакт (между вектором скорости оси ротора и касательной к статорной поверхности, проведенной через точку контакта) удовлетворял условию $\psi_{\text{вх}} \approx 90^\circ$, то из-за силы трения угол выхода из него становится $\psi_{\text{вых}} > 90^\circ$, и устанавливается обратная прецессия ротора. В работе приводится выражение и расчет энергии, рассеиваемой вследствие контактного трения, в зависимости от μ , нормальной контактной силы, величины радиального зазора, скоростей прецессии и вращения. Помимо сил контактного давления и

трения упор делается на вычисление углов $\psi_{\text{вх}}$, $\psi_{\text{вых}}$ и траекторий оси ротора. Выявлена увеличенная частота переменной компоненты контактных сил в начале задевания и обкатывания, что означает повышенное влияние на движение ротора. При этом если происходит резкое изменение углов входа/выхода из начального (ударного) взаимодействия ротора со статором, то это рано или поздно приводит к установлению безотрывной обратной прецессии. Оценка влияния жесткости контактных поверхностей показала, что чем она выше, тем больше магнитуа контактных сил, которые становятся ещё большими в случае возникновения обкатки. Кроме того, чем больше μ и меньше конструкционное демпфирование ротора, тем резче изменяются углы $\psi_{\text{вх}}$, $\psi_{\text{вых}}$. Также примеры орбит ротора в начале задевания за статор даны для различных значений дисбаланса и коэффициента трения.

Падован в соавторстве с Чоем [Padovan, 1987] исследовал переходные процессы, возникающие при задевании одной или нескольких лопаток ротора за статор, проводя те же вычислительные эксперименты как в [Choy, 1987]. Основное внимание уделено влиянию на контакт жесткости и числа лопаток, одновременно соприкасающихся со статором, а также анализу перемещений и напряжений в них. В отличие от [Choy, 1987] в этой работе выделены пять стадий движения ротора до, во время и после нескольких актов задевания лопаток за статор. Отсутствие контакта, начальная стадия взаимодействия – контакт одной лопатки со статором, стадия развитого взаимодействия – контакт нескольких лопаток со статором, конечная стадия взаимодействия – контакт одной лопатки со статором, выход из состояния взаимодействия. При описании упругого поведения лопаток использованы линейные зависимости классической теории изгиба балок. С их помощью выведены выражения для радиального и окружного прогибов конца каждой лопатки в виде функций нормального усилия в концевом сечении лопатки. Также следует отметить, что в [Padovan, 1987] приведены в математической форме условия, т.е. фактически

изложен метод моделирования, отсутствия или существования контакта между лопатками и статором. Выводы данной работы весьма близки к тем, которые следуют из работы [Choy, 1987]. Повышение коэффициента трения и дисбаланса в системе приводит к увеличению нормальной контактной силы N и максимальных напряжений в лопатках $\sigma_{\max}$, а также к более резким изменениям углов входа и выхода траектории ротора из зоны контакта при задевании. Соответственно раньше начинается обкатка. Возникновению обкатывания соответствует достижение максимумов сил контактного взаимодействия, перемещений и напряжений в лопатках. Увеличение жесткости лопаток сказывается на возникновении обкатки в гораздо меньшей степени и способствует уменьшению перемещений лопаток, в то же время оно приводит к увеличению N и $\sigma_{\max}$.

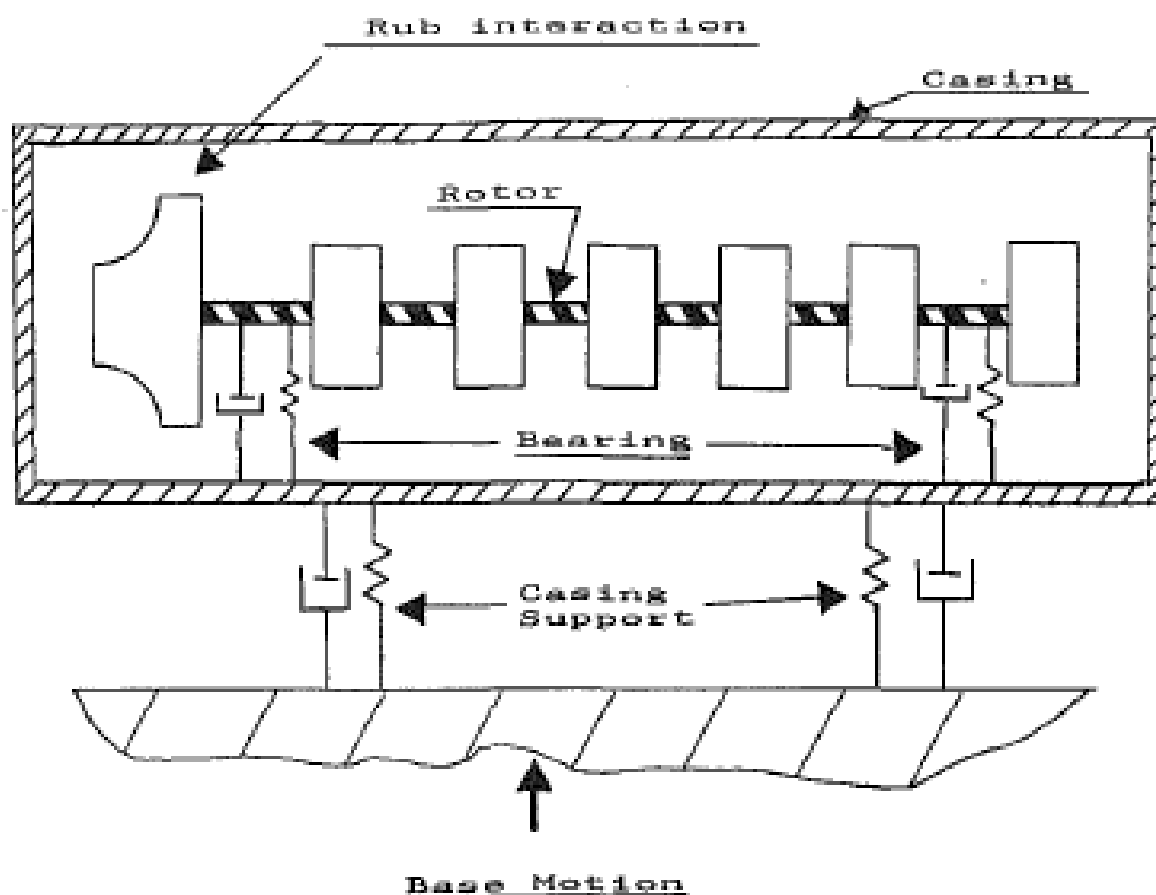
Эрих [Ehrich, 1988] опубликовал результаты расчетных и экспериментальных наблюдений субгармонических колебаний горизонтального ротора, самовозбуждающихся когда его ось эксцентрична оси жесткого статора, зазор между ними мал, и на каждой орбите имеет место локальный контакт при возбуждении ротора остаточным дисбалансом. Ротор начинает подпрыгивать (двигаться с отскоками от статора) в вертикальном направлении преимущественно с основной собственной частотой, отвечающей случаю его жесткой связи со статором, когда ω в n (целое число) раз превышает основную частоту, т.е. доминирующая частота колебаний есть $\frac{1}{n}$ частоты вращения. Причем чем больше порядок n , тем выше уровень вибрации ротора, кратных основной критической. Однако при уменьшении нелинейности (расцентровки или зазора между ротором и статора), а также при возрастании конструкционного демпфирования ротора его субгармонические колебания в вертикальном направлении на псевдокритических частотах вращения, в первую очередь очень высоких порядков (четвертого и выше), рано или поздно исчезают. Численное интегрирование уравнений модели Джеффкотта и

натурные испытания авиационной газовой турбины проведены при квазистационарных режимах ротора, частота вращения которого варьировалась от двух до девяти раз выше $\tilde{\lambda}$ (его основной собственной с учетом опоры на статор).

Светиканин [Cveticanin1989] оценил динамическую устойчивость ротора с двумя степенями свободы и изменяющейся во времени массой при действии на него нормальной силы и силы трения со стороны жесткого статора. При этом использованы известные три теоремы Ляпунова об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, что в приложении к ротору, задевающему статор, оказывается близким к определению Бегга [Begg, 1974]. В результате им получены параметрические неравенства (условия), при которых ротор с переменной массой и контактирующий со статором будет устойчивым. В частности, из них следует, что запас по устойчивости убывает с увеличением присоединяемой к ротору массы и его угловой скорости, а также с уменьшением коэффициентов контактного трения и конструкционного демпфирования.

Ещё две пионерские работы Чоя и Падована [Padovan, 1988, Choy, 1989] посвящены разработке методики, позволяющей исследовать поведение системы «ротор-статор» с большим числом степеней свободы (рис. 8), путем использования метода разложения по собственным формам в сочетании с численным интегрированием и быстрым преобразованием Фурье. Формы колебаний системы определяются с учетом упругости ротора, статора и их опор, а также влияния конструкционного демпфирования и гироскопического эффекта. Возмущающими факторами являются дисбаланс и «монозадевание» в консольной части ротора, а также сейсмическое воздействие. В результате отмечено, что место задевания работает как дополнительная опора, изменяя тем самым граничные условия и спектральные характеристики. В связи с этим происходит скачкообразный сдвиг всех собственных частот системы в сторону их повышения. Также выявлены типичные признаки (спектры) для прямой и

обратной прецессии, ударов и «прихватывания» ротора в жестком и податливом статоре, причем в случае достаточно податливых опор статора возникает перемежающееся заедание, т.е. действующее с перерывами [Choy, 1989]. Большое внимание в [Padovan, 1988] уделено несимметричности сил и перемещений при сейсмическом воздействии, а также сравнению модуля (нормальной) силы контакта с её x , y – компонентами (проекциями на соответствующие оси) во временной и частотной областях. Возмущения, зависящие от направления, сильно влияют на частоту задевания. БПФ-спектр x , y – реакций статора характеризуется пиками, сдвинутыми относительно фактической частоты задевания, определяемой БПФ-спектром нормальной реакции статора, на величину $\pm$ частота прецессии ротора.



Смолли [Smalley, 1989] подтвердил заключение из работы [Dimarogonas, 1969] об уменьшении уровня синхронной вибрации ротора, нагревающегося вследствие трения о статор, при скоростях вращения выше основной критической, рассчитывая нестационарные режимы турбины (разгон-выбег ротора внутри лабиринтных уплотнений в условиях изменчивости теплопередачи и его изгиба). При определении тепловых потоков внутрь и из ротора, сил контактного давления и трения и динамического отклика, т.е. в ходе решения уравнений теплопроводности при переменных во времени граничных условиях и связи температурного распределения с роторным изгибом, использован дискретный подход – рассмотрение конечных объемов. В результате получено ожидаемое влияние ускорения и замедления. Чем меньше скорость прохождения основного резонанса, тем больше тепловое отклонение ротора вследствие его трения об уплотнения. В частности показано: ускорение со скоростью 20 об/мин в сек. является медленным и приводит к интенсивному контактному трению и динамическому отклику; темп от 60 до 80 об/мин в сек. в значительной степени снижает уровень колебаний; скорость нарастания 160 об/мин в сек. доводит вибрацию ротора до минимума. Вместе с тем выявлена особенность замедления с трением, когда уровень синхронных колебаний ротора начинает расти вблизи резонансной частоты и продолжает увеличиваться с уменьшением скорости вращения в диапазоне намного ниже критического.

Новаторские работы 90-х гг.

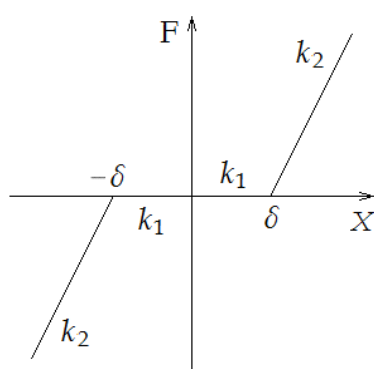
На первый взгляд выпадающая из роторной тематики статья Мураками и Сато [Murakami, 1990] привносит весьма полезный экспериментально-теоретический вклад. Она касается балочных систем с малым зазором в одной из опор и определения их амплитудно-частотных характеристик. Последние рассчитываются путем замены нелинейной упругости (опоры с зазором), которая включена в матрицу жесткости $[K]$ вынужденно колеблющейся системы в соответствующем узле балочной модели, на гармонический коэффициент передачи (ГКП). Так, если по методике авторов в уравнении движения системы со многими степенями свободы и упругой нелинейностью $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$ при её возмущении с частотой ω матрицу $[K]$ преобразовать в матрицу жесткости $[K_{GN}]$, нелинейным элементом которой является ГКП, и положить $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$ и $\{f\} = \{F\}e^{i\omega t}$, то можно получить

$$\{X\} = ([K_{GN}] - \omega^2[M] + i\omega[C])^{-1} \{F\}. \quad (2)$$

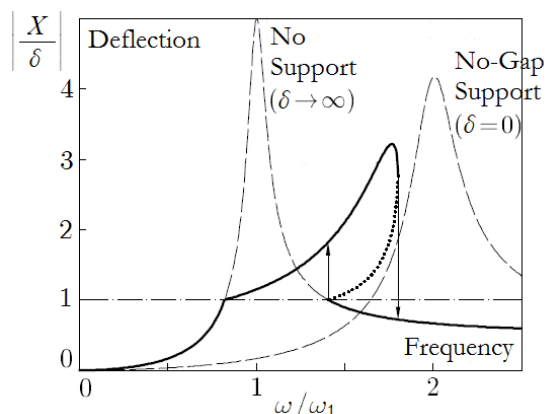
ГКП для опоры с зазором δ авторы принимают в виде кусочно-линейной жесткости (рис. 9) и в следующей формулировке:

$$\begin{aligned} G_N(X) &= k_1, \quad \text{если } |X/\delta| \leq 1 \\ G_N(X) &= k_2 + (k_1 - k_2)k(x), \quad \text{если } |X/\delta| > 1 \end{aligned} \quad (3)$$

где $k_1 \ll k_2$, $k(x) = (2/\pi) \left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$, $x = \delta/X$. Далее, задавая ω и подбирая итерационным способом такое X , чтобы удовлетворялись оба соотношения (2) и (3), строится искомая АЧХ в интересующем диапазоне (рис.10). Вопреки тому, что нелинейные системы нельзя описать с помощью понятия формы колебаний, полученные результаты показывают – такое представление допустимо, несмотря на нелинейность, вызванную зазором.



**Рис. 9. Нелинейность,
вызванная зазором**



**Рис. 10. Расчетная АЧХ исследуемой
нелинейной системы в зависимости
от нормированной частоты
возмущения в окрестности первой
собственной частоты**

Эрих [Ehrich, 1991] с помощью ротора Джеффкотта, эксцентрично расположенного внутри жесткого статора, показал, что роторная вибрация в переходных диапазонах между двумя соседними полосами субгармонического резонанса является хаотической (апериодической). Орбиты ротора в зоне хаоса подобны периодическим субгармоническим колебаниям [Ehrich, 1988], возникающим при несколько меньшей или большей частоте вращения, но никогда не повторяются и ощутимо зависят от начальных условий. Доминирующая частота хаотических колебаний ротора близка к его собственной частоте без какой-либо тенденции синхронизации к частотам, равным $\frac{1}{n}$ или $\frac{1}{n+1}$ частоты вращения. Пользуясь итерационным отображением Пуанкаре, т.е. «картиной» зависимости некоторого локального предельного смещения ротора от предыдущего, Эрих выяснил, что поведение ротора в зонах перехода (хаоса) не является случайным, а представляет собой последовательность бифуркаций орбиты при изменении ω . Эти выводы подкреплены измерением-записью апериодических орбит и доминирующей

частоты колебаний ротора, близкой к его основной собственной, при работе двух быстроходных турбодвигателей.

Янсен [Jansen, 1991] представил однопролетную секцию типового бура для сверления нефтегазовых скважин в виде неуравновешенного, тонкого, полого вала на двух подшипниках скольжения по концам, в которых гидродинамический клин отсутствует, а цапфа имеет большой диаметр и постоянно трётся о вкладыш. При этом он оригинально, пользуясь разложением функций, зависящих от угла трения $\gamma = \arctg \mu$, в ряд Маклорена, задал восстанавливающие-контактные силы. Положив скорости и ускорения равными нулю в уравнениях движения в синхронно или обратно вращающейся системе отсчета, он полученными аналитическими решениями показал нелинейные динамические эффекты системы, обусловленные наличием жидкости внутри вала, зазоров и трения между вращающимися и неподвижными стенками. Вместе с тем определены и подтверждены численными расчетами на основе критерия Рауса-Гурвица и итерационного отображения Пуанкаре условия устойчивой прямой прецессии вала, связанной с его разбалансировкой, в т.ч. установлено следующее. Заданная пропорциональной квадрату скорости сила сопротивления жидкости уменьшает прогиб вала. Присоединенная жидкая масса и зазоры понижают низшую критическую скорость вала. Прямое синхронное прецессионное движение вала устойчиво, пока эксцентриситет его массы a превышает величину зазора в опорах δ , в противном случае ($\delta > a$) устойчивость нарушается при скоростях вращения выше критической. В диапазоне неустойчивости колебания вала носят либо периодический, либо хаотический характер с высокой чувствительностью к начальным условиям. Контактное трение в опорах дополнительно уменьшает амплитуду и диапазон устойчивой прямой прецессии вала. Если $\delta < a$ эти эффекты скромные, но они становятся всё более выраженными с ростом отношения δ/a , вплоть до полного исчезновения полосы устойчивого синхронного движения. Более того,

контактное трение при выполнении неравенства $\varepsilon\delta/(\beta\gamma)<1$, где ε и β – безразмерные коэффициенты демпфирования и массы вала, может привести к обкатке цапф (по вкладышам) без, если $\eta_b = fr/(f_0\delta) < \eta_b^* = \sqrt{\beta^{-1}(1 - \sqrt{\varepsilon\delta/\beta\gamma})}$, или с существованием, если $\eta_b > \eta_b^*$, проскальзывания, в т.ч. с большой амплитудой обратной прецессии вала с частотой близкой к его собственной.

Экспериментальная, по большей части, работа Лингенера [Lingener, 1991] раскрывает условия возникновения обкатки, в частности потенциальные диапазоны скоростей ротора, отмечая вклад внешнего возбуждения (удара по ротору). Последнее может в любой момент изменить синхронное скольжение на чистое качение с частотой, равной синхронной частоте f , умноженной на коэффициент, равный отношению радиуса r ротора к зазору δ в контактном месте, а также с соответствующей суперсинхронной обратной прецессией. Такая обкатка продолжается в случае увеличения f до тех пор, пока не будет достигнут порог, при котором возникает проскальзывание. Выше этого порога частота обкатки со скольжением остается постоянной, близкой к собственной частоте контактирующей системы «ротор-статор». В ходе варьирования критических скоростей ротора, жесткости крепления статора, величины зазора и трения между ними автор обнаружил, что данная частота, обусловленная обкатыванием с проскальзыванием, не может быть пройдена ни при каких начальных состояниях. В результате им констатируется – при приближении частоты обкатки, подчиняющейся известному геометрическому отношению $\Omega = fr/\delta$, к собственным частотам связанной системы «ротор-статор» дальнейшее увеличение частоты вращения f приводит к комбинации (суперпозиции) качения и скольжения такой, что Ω остается постоянной, несмотря на нарастание скорости ротора. Наряду с этим эффектом происходит резонансный рост отклонений ротора и статора. Используя простую аналитическую модель с двумя степенями свободы и структуру диаграммы Кэмпбелла с линиями $\Omega = f$ и $\Omega = fr/\delta$, автор систематизировал свои опытные данные. Наименьшая частота

обкатывания всегда выше, чем наименьшая (основная) собственная частота ротора f_0 . Верхняя предельная Ω всегда ниже, чем наименьшая собственная частота контактирующей системы «ротор-статор» $\tilde{f}_0$, но при условии, что статорные опоры достаточно жесткие (когда $\tilde{f}_0$ значительно больше f_0). Если опоры статора очень мягкие (когда $\tilde{f}_0 < f_0$) частота обкатывания ограничивается второй собственной частотой связанной системы $\tilde{f}_2$. «Промежуточные» (мягкие) опоры статора (когда $\tilde{f}_0$ немного больше f_0) приводят к явным явлениям скачка и гистерезиса амплитудно-частотных характеристик контактирующей системы. При частотах вращения $f < f_*$, где f_* принимает фиксированное значение между характерными частотами f_0 и $\tilde{f}_0$, внешним возмущением (ударом) может быть вызвана обкатка с большими смещениями и частотой до $\tilde{f}_0$, а в полосе $f_* < f < \tilde{f}_0$ – с меньшими отклонениями и частотой до $\tilde{f}_2$. В диапазоне $f > \tilde{f}_0$ происходит самовозбуждение «высокочастотной» обкатки (с максимальной частотой не более $\tilde{f}_2$), но при последующем возвращении (понижении) частоты вращения меньше f_* частота обкатки внезапно падает ниже $\tilde{f}_0$ и амплитуда колебаний резко возрастает. Интересные результаты получены при увеличенном зазоре – при переходе через низшую собственную частоту связанной системы «ротор-статор», возбуждаемую дисбалансом (при приближении f к $\tilde{f}_0$), возможно устойчивое обкатывание ротором статора, представляющее собой суперпозицию резонансной синхронной прецессии, качения и скольжения. Вне зоны резонанса доминируют качение и скольжение с угловой скоростью Ω между $\omega r/\delta$ и $\tilde{\lambda}$. При этом, чем меньше зазор δ , тем больше сила давления ротора на статор N , необходимая для возникновения обкатки. Анализ влияния конструкционного демпфирования и контактного трения на зависимости фазового сдвига (угла отставания) направления движения оси ротора от

направления возмущающей силы N и угла между радиальными отклонениями ротора и статора от частоты прецессии Ω подтвердил реализуемость обката в указанных частотных диапазонах. Наряду с этим показаны «полоса невозможности» обката, характеризующаяся теоретически отрицательной нормальной силой N и находящаяся между $\tilde{f}_0$ и f_s , а также «несущественность» коэффициента трения в поведении системы, обусловленная тем, что необходимый для обката коэффициент μ в диапазоне между f_0 и $\tilde{f}_0$ весьма мал.

Флауэрс и Бу [Flowers, 1993], вводя в модель Джеффкотта гибкость диска, характеризующуюся пятикратным превышением частоты диска относительно частоты собственных колебаний ротора, оценили поведение однодискового ротора в подшипниках с зазорами. С привлечением метода гармонического баланса получено оригинальное нелинейное алгебраическое уравнение в обычной и матричной форме для предполагаемого динамического отклика системы. В процессе численных решений выявлена повышенная супергармоническая вибрация ротора третьего порядка, обусловленная в первую очередь не зазорами, а резонансом диска. По-видимому, существует тенденция, чем ближе частота вращения или её малая кратная (удвоенная или утроенная) к частоте гибкого диска, тем выше амплитуда не только соответствующих резонансных, но и вызванных зазорами супергармонических колебаний систем валов с дисками.

Чои [Choi, 1994, Choi, 2002], рассмотрев динамические жесткости и обратные им динамические податливости гибкого ротора и жесткого статора на упругих опорах, как определяющие их радиальные смещения (x_r, x_s) , и исходя из необходимого для контакта условия $x_r > x_s$, установил скорости прецессии/вращения, при которых в системе возможны чистое качение, обкатка с проскальзыванием и синхронное скольжение. Влияние эксцентриситета ротора также учитывается для нахождения максимальной скорости вращения, при которой качение с проскальзыванием сменяется прямой прецессией. Его

аналитические расчеты предсказывают, что, во-первых, если ротор и статор прецессируют с частотой, близкой к объединенной собственной $\omega_{rs}^+ = \sqrt{(k_r + k_s)/(m_r + m_s)}$, нормальная сила между ними становится бесконечной, а для их прецессий характерен резонанс, во-вторых, чем больше зазор, тем больше нормальная сила и радиусы безотрывных прецессионных движений (ротора и статора). Последние зависят и от того, какая из пары собственных частот ротора ω_r и статора ω_s находится ниже. В случае $\omega_r < \omega_s$ чистое качение ротора по статору возможно пока скорость прецессии $\Omega = \omega r / \delta$ остается ниже ω_{rs}^+ , и ротор может скользить по статору в прямом и обратном направлениях пока скорость прецессии $\Omega \neq \omega r / \delta$ находится между ω_{rs}^+ и $\omega_{rs}^- = \sqrt{(k_s - k_r)/(m_s - m_r)}$. В случае $\omega_s < \omega_r$ обкатка возможна пока скорость вращения $\omega < \omega_{rs}^+$. Эффект эксцентриситета состоит в том что, когда происходит обкатка, он может нарушить её по мере увеличения скорости вращения, а когда происходит чистое скольжение, должна существовать определенная разность фаз между смещением геометрического центра ротора относительно неподвижной точки и смещением центра масс ротора относительно геометрического центра ротора. В [Choi, 2002] акцентируется внимание на динамическом коэффициенте трения μ_d , который численно вычисляется из системы сил, как равный отношению тангенциальной контактной к нормальной контактной, и должен быть меньше известного кулоновского (располагаемого) коэффициента трения μ для материалов ротора и статора. Результаты расчета и поиска диапазонов, где $\mu_d < \mu$, означающие возможность обкатки при заданной частоте вращения, показывают, что μ_d определяет начало и исчезновение чистого качения, тогда как эксцентриситет ротора – начальную ($\omega_{\min}$) и конечную скорости вращения ($\omega_{\max}$) для обкатки с проскальзыванием при увеличении ω . Аналитические и численные прогнозирование автор подкрепляет собственными хорошо согласующимися опытными данными.

Голдман и Мушинска [Goldman, 1994, Muszynska, 1995] выполнили численное и аналитическое моделирование неуравновешенного ротора на анизотропных подшипниках и с неполным кольцевым трением о жесткий статор с упруго-вязкой контактной поверхностью, причем такой, что при контакте со статором вращению ротора препятствует тангенциальная смешанная сила вязко-сухого трения. Они пренебрегали эффектом кручения ротора, и скорость вращения считалась постоянной. В аналитической модели согласно практическим наблюдениям также предполагалось: 1) стадия контакта (от начала до отрыва) включает малую вибрацию ротора, такую что: $|z| - \delta = \varepsilon u$, где $z = x + iy$ – комплексное перемещение роторного центра, ε – малый параметр, u – относительная переменная, введенная для аналитических преобразований; 2) из-за преобладающего движения (вращения) ротора в течение его контакта со статором трение не может изменять знак $v_{\text{отн}}$ – относительной линейной скорости (скольжения) ротора ($v_{\text{отн}} = \text{const}$); 3) контакт характеризуется нормальным и тангенциальным коэффициентами восстановления вида:

$$k_n = -\frac{|\dot{z}|^+}{|\dot{z}|^-}, \quad k_\tau = \exp\left(-\frac{rD_\tau}{\delta M} t_c\right),$$

где « $-$ » и « $+$ » обозначают соответственно скорости в момент удара ротора о статор и в момент разрыва контакта, M – масса (модальная) ротора, D_τ – коэффициент вязкого демпфирования статорной поверхности в тангенциальном направлении, t_c – время (длительность) контакта. При этих допущениях определено восстановление (как послеударное значение) угловой скорости прецессии:

$$\dot{\psi}^+ = \begin{cases} k_\tau \dot{\psi}^- - \omega \frac{r}{\delta} (1 - k_\tau) - \mu |\dot{z}|^- \frac{r}{\delta^2} (k_n + k_\tau) \text{sign}(\delta \dot{\psi}^- + r\omega), \\ \text{если } \text{sign}(\delta \dot{\psi}^+ + r\omega) = \text{sign}(\delta \dot{\psi}^- + r\omega), \\ -\omega \frac{r}{\delta}, \quad \text{если } \text{sign}(\delta \dot{\psi}^+ + r\omega) \neq \text{sign}(\delta \dot{\psi}^- + r\omega). \end{cases}$$

Эти соотношения описывают тангенциальный эффект удара ротора о статор, который ещё называют эффектом «супершара» [Кобринский1973]. Как видно, прецессионная скорость после контакта зависит от доударной скорости прецессии (первое слагаемое), а также от скорости вращения ω и сухого трения на контактирующих поверхностях, соответствующий коэффициент μ появляется в произведении с набегающей радиальной скоростью. Отсюда ясно, что большое значение этого произведения или большое значение ω , входящие в первое соотношение с отрицательными знаками, могут изменить поступательное (прецессионное) движение ротора с прямого на обратное ($\dot{\psi}^+$ становится отрицательной). Вместе с тем влияние ω более «драматично», что следует из второго соотношения, где вне зависимости от других параметров скорость $\dot{\psi}^+ < 0$, т.е. оно всегда приводит к обратной орбите ротора. В численных расчетах рассматривались два случая вязкого демпфирования статора: коэффициент D_n по нормали порядка $2\sqrt{K_n M}$ и $D_n \gg 2\sqrt{K_n M}$, где K_n – контактная жесткость статорной поверхности. В первом приближении было определено, что нормальный коэффициент восстановления k_n зависит исключительно от нормального коэффициента демпфирования статора $\zeta = D_n / (2\sqrt{K_n M})$, как:

$$k_n = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \arccos(2\zeta^2 - 1)\right), & \text{если } \zeta \leq 1 \\ \exp\left(-\frac{2\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right), & \text{если } \zeta > 1 \end{cases}.$$

Модель контакта Голдмана-Мушински для частично кольцевого трения, учитывающая радиальные (прямолинейные) эффекты жесткости и вязкого демпфирования статора и тангенциальные, за счет вращения ротора и его сухого трения (о статор), называемые эффектами «супершара», позволила им продемонстрировать следующее. Коррелирующие с количеством ударов за

колебание и сопровождающиеся высшими гармониками как регулярные паттерны синхронного (1ω) и субсинхронного ($\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{3}\omega$, ...) порядка, так и хаотические паттерны виброударного движения ротора. Так, для гармонических и субгармонических колебаний низшего порядка (1ω и $\frac{1}{2}\omega$), доминирующими в наиболее широкой полосе частот являются периодичности с одним ударом за колебание. Все другие движения представляют собой бифуркацию и переход между последними. Для субсинхронного движения порядка $\frac{1}{3}\omega$ отмечена тенденция многоударного поведения и с увеличением диапазона хаоса, что указывает на возрастающую интенсивность генерации хаотических движений при более высокой частоте вращения. В случае асимметрии жесткости роторных опор в системе наблюдается дополнительный вид субгармонических колебаний. Наконец приведенные экспериментальные результаты относительно динамических поведений ротора с нескольких реальных установок, качественно совпадая с полученными аналитически и численно, подтверждают существование упорядоченных (периодических) и хаотических роторных движений. Причем и те, и другие подтверждают тот факт, что полосы хаотических колебаний уменьшаются с увеличением демпфирования.

Нельзя не отметить и другое аналитическое моделирование от этих авторов [Goldman, 1995]. Рассматривая неуравновешенный горизонтальный изотропный ротор на его первой поперечной моде с местным малым сухим трением о статор на одном из участков вдоль оси, они предположили, что из-за сопутствующего локализованного нагрева и неравномерного распределения температуры возникает тепловой изгиб вала. Распределение температуры за счет нагрева от контактного трения задается уравнением теплопереноса с соответствующими граничными условиями, в котором плотность теплового потока на единицу площади определяется нормальной силой и вращением-прецессией ротора. Общая термическая-механическая задача частично развязана допущением, что тепловой процесс является относительно

медленным, и как следствие, термоизгиб остается в уравнениях движения как постоянный параметр. Уравнения модели с кусочно-переменной жесткостью проинтегрированы с использованием порождающего приближения. Полученное решение позволило представить исходные уравнения системой четырех весьма компактных уравнений (24) с медленными переменными ρ и C_1 , которые являются безразмерными амплитудами горизонтального и вертикального отклонений ротора, а также с вращающимися фазами этих отклонений θ и Φ . Фаза горизонтального отклика θ имеет постоянную частоту n_1 , равную отношению первой собственной ротора (v_1) при отсутствии его контакта со статором к скорости вращения Ω . Фаза вертикального отклика Φ имеет частоту ω , зависящую от n_1 и C_1 . При предполагаемом вертикальном направлении радиальной силы нагружения частота вертикального отклика всегда выше, чем частота горизонтального отклика. Фурье-анализ малых правых членов системы уравнений (24) и соображения энергетического баланса позволили определить возможные резонансы. Далее методом усреднения, примененным к системе (24) вблизи этих резонансов, с одновременным анализом устойчивости, были получены стационарные решения. Эти решения в общем виде описывают поведение ротора вблизи горизонтальных резонансов, возникающих в зависимости от значения параметра жесткости ρ при $\Omega = (1 \div 1.05)v_1$. Они также описывают в зависимости от ρ последовательные окрестности основного и дробных вертикальных резонансов (см. (34) при $k=1, 2, 3, \dots$), возникающих при $\Omega = k(1.3 \div 1.8)v_1$. Разработанная аналитическая методика дает представление о колебаниях термосистемы «ротор-статор» в сравнительно узких полосах частот (вблизи резонансов). При этом из полученных результатов следует, что движение в этих диапазонах носит периодический или квазипериодический характер, а в остальном диапазоне возможна хаотическая вибрация. Но главное – авторы вывели уравнение теплового изгиба (43) с осредненным (по наибольшему периоду колебаний

ротора) коэффициентом тепловыделения. В зависимости от параметров системы «ротор-статор» термоизгиб ведет себя в соответствии с одним из трех вариантов: 1) асимптотическое приближение к своему предельному (равновесному) состоянию; 2) нарастающее спиралевидное движение его вектора (направления термоизгиба) в сторону, противоположную вращению; 3) медленные колебания (теплового изгиба). Результаты Голдмана-Мушински по поведению термоизгиба качественно согласуются со сведениями из работы [Kellenberger, 1980]. Однако они отличаются от них условиями перехода от одной вибрации к другой. Это отличие связано с более точным описанием динамики системы «ротор-статор» при контактном трении.

Ахметшин и Нагаев [Ахметшин, 1995] рассмотрели уравнения нестационарного вращения жесткого ротора со значительным дисбалансом a в опорах скольжения с малым зазором δ , вводя малый параметр $\varepsilon = \delta/a \ll 1$, а также предполагая, что под действием центробежной силы (ротора) смазка полностью выдавливается из пространства между цапфами и вкладышами подшипников, вследствие чего образуется сухое трение. Назвав эти уравнения «уточненными», авторы показали возможность немалых быстрых колебаний угла рассогласования между эксцентриситетом и полярным радиусом (кратчайшим расстоянием от центра/оси ротора до точки/линии контакта). В частности, стационарное движение ротора, которое в данном случае носит характер равномерного вращения, нарушается по мере увеличения коэффициента трения μ так, что на него накладываются колебания высокой частоты, в первом приближении равной $k\omega\sqrt{\varepsilon}$, где $k = \sqrt{(I_0 + ma^2)/(I_0 \cos \gamma + mra \sin \gamma)}$ и $\gamma = \arctg \mu$.

В большинстве традиционных конструкций магнитных подшипников используются также вспомогательные в виде подшипников качения или втулок с фиксированным зазором, равным примерно половине воздушного зазора главных магнитных подшипников. Маслен и Барретт [Maslen, 1996]

теоретически определили возможное безотрывное движение ротора по вспомогательным опорам втулочного типа, а также необходимое условие для его установления в предположении, что система изотропна, и действуют только контактные силы. Оказалось, прецессия должна быть обратной и с частотой, очень близкой к одному из резонансов системы «ротор-втулки» без учета зазоров. Для роторов со слабым демпфированием эта частота, как правило, будет чуть меньше самой низкой резонансной частоты. После того как с помощью оригинальной процедуры возможные частоты обкатывания определены, авторы указывают также на осуществимость расчета контактных сил на этих частотах и соответствующей динамической реакции ротора.

Чен, Уолтон и Хешмет задумали и испытали [Chen, 1997] вспомогательный подшипник с нулевым зазором (ZCAB) из ряда взаимосвязанных роликов. Когда вал падает на ZCAB из-за отказа магнитного подшипника или кратковременного контакта, ролики перемещаются по окружности и радиально внутрь, тем самым устраняя зазор и вновь центрируя вал [Heshmat, 1998]. Помимо центрирования вала, низкий коэффициент трения между валом и ZCAB исключает обратное безотрывное движение. ZCAB позволяет разделить нагрузку с главным магнитным подшипником и даже заменить последний на некоторое время. В связи с этим авторы представляют проектные и измеренные параметры ZCAB, относящиеся к сроку службы, переходным режимам и установившимся динамическим характеристикам. Также ими проведено сравнение критических скоростей ротора, поддерживаемого ZCAB, и ротора на магнитных подшипниках.

Вэгнер с др. [Wegener, 1998] оригинально оценили синхронный установившийся отклик неуравновешенных многодисковых роторов и длинных валов с распределенной массой со страхующими подшипниками, имеющими заданные зазоры. Показаны три различных метода аналитического расчета нелинейного стационарного поведения таких систем, а также пределы применимости этих методов. Первый метод расширяет подход, известный по

гибкому двухопорному ротору с диском посередине внутри обладающего массой и упругодемпфирующей подвеской ограничителя его поперечных колебаний, соответственно до дискретного ротора с несколькими степенями свободы, а также до моно-ротора, как сплошного в представлении Галеркина. Два других метода основаны на решениях, вытекающих из предельного случая – страхующего подшипника с нулевым зазором. При этом во втором из методов используются специальные линейные решения, рассчитанные при различной поперечной жесткости такого ограничителя, чтобы затем определить по нескольким точкам резонансную диаграмму образующейся нелинейной системы. В третьем (методе) используются собственные частоты и соответствующие формы колебаний системы «гибкий ротор – подшипники с нулевым зазором» для приближенного модального расширения на систему ротора с распределенной массой и опор, одна из которых с зазором. Как главный результат демонстрируется – в диапазоне первого резонанса, когда соответствующая пучность ротора ограничивается предусмотрительно размещенным здесь страхующим подшипником с конечным зазором, график АЧХ сглаживается и изгибается вправо. Однако в других резонансных зонах влияние этого удерживающего подшипника ослабевает так, что усечение и наклон амплитудных пиков исчезают. Таким образом, установка одной опоры с зазором, предназначенной для достижения эффекта ограничения в заданной резонансной полосе, не дает такого же результата в других резонансных зонах, и следовательно, для уменьшения амплитуд ротора в широком диапазоне его скоростей необходимо несколько страхующих подшипников.

Фатарелла [Fatarella, 1999] определил условия, при которых возникает обкатывание, отталкиваясь от простой аналитической модели «гибкий уравновешенный ротор – подвижный статор» с четырьмя степенями свободы, полагая демпфирование в системе гистерезисным, но в нехарактерной формулировке – с отрицательной мнимой величиной:

$$\begin{aligned} m_r \ddot{r}_r + k_r(1 - i\eta_r)r_r &= -F_c \\ m_s \ddot{r}_s + k_s(1 - i\eta_s)r_s &= F_c \end{aligned}.$$

Такой выбор автор обосновывает тем, что «уравнения представляют движение бегущей волны, при котором скорость опережает перемещение в направлении прецессии», которая в свою очередь предполагается обратной. Кроме того, из этих уравнений следует, что принятое демпфирование «действует таким образом, что ускоряет обратную прецессию». Из уравнений движения также установлено следующее. «Условие нулевого скольжения» (когда мгновенная скорость точки контакта, если считать ее принадлежащей ротору, относительно скорости той же точки, принадлежащей подвижному статору, равна нулю) является устойчивым состоянием для обкатки, если только ротор не прецессирует с частотой, близкой к Ω – собственной частоте соединенной системы. Установление равновесия при обкатке не требует внешнего возбуждения, такого как дисбаланс ротора. Напротив, неуравновешенность вызывает эффект неустойчивости, вызывающий экспоненциальный рост амплитуды колебаний. Условия обкатки изменяются в зависимости от таких параметров, как собственная частота ротора и статора, коэффициенты демпфирования, зазор между ротором и статором, отношения масс и жесткостей. Кроме того, была численно воспроизведена U-образная кривая, нижняя ветвь которой представляет собой порог постоянного контакта, а верхняя ветвь ограничивает диапазон частоты качения, выше которого не может быть достигнуто условие нулевого проскальзывания. При этом верхняя граница примерно совпадает с Ω . Наконец, моделирование выявило особенное поведение системы во время обкатывания. В случае, когда ротор и статор имеют близкие собственные частоты, амплитуда смещения статора в конечном итоге может быть больше, чем у ротора, вызывая переключение их взаимного положения в направлении прецессии. Частота, при которой смещение статора может превысить смещение ротора, ниже Ω . Экспериментально обнаружены и другие особенности обкатки, предсказанные теоретическим анализом, в частности те факты, что для запуска обкатывания необходим соответствующий коэффициент трения скольжения, и что оно чувствительно к зазору между ротором и статором. Также замечено, обкатка сопровождается высокочастотными осциллограммами, и она чувствительна к степени анизотропии системы.

Прорывные исследования нулевых

Барта [Bartha, 2000] построил расчетную модель ротора Джеффкотта, работающего в подвижном статоре, состоящем из двух вложенных друг в друга масс (рис. 11), основанную на численном интегрировании уравнений их движений с упруго-фрикционной контактной связью. Как показали его натурные эксперименты, модель (рис. 11) способна хорошо качественно и количественно описывать начальную и основную фазы обкатывания, т.е. от удара с необходимой скоростью сближения (ротора к статору) до развития обратной прецессии. Выяснилось, что для начала обкатки нужно достаточно сильное соударение, что в основном определяется коэффициентом трения между ротором и статором, тогда как параметры обкатки (АЧХ обратной прецессии) – динамическими податливостями системы. Влияние частоты вращения f на АЧХ прецессии ротора мало по сравнению с влиянием собственных частот ротора и статора, что доказано доведением f до 166 Гц. При этом расчетным путем и на его репрезентативном экспериментальном стенде с реалистичными частотными характеристиками и радиальным зазором ни разу не было исполнено чистое качение ротора по статору. В то же время при обкатке получены очень высокие частоты порядка нескольких сотен герц (рис. 12). Объявленные автором способы защиты (от обкатки) это: уменьшение коэффициента трения скольжения, высокое модальное демпфирование и пониженный коэффициент восстановления ударов (ротора о статор). Однако самым важным выводом из расчетов и испытаний является тот факт, что хотя поведение системы (рис. 11) качественно меняется по сравнению с жестким закреплением статора, частота обкатывания остается высокой, так как доминирующее влияние начинает оказывать вторая мода статора (наружное кольцо в модели). Это значительно снижает вероятность того, что частота обкатки может быть снижена до низких значений за счет простого ослабления крепления статорных элементов. Вместе с тем, порассуждав о природе обкатки, автор дал рекомендации по снижению риска обратного движения, в частности

нужны: высокая жесткость (первая мода) ротора, что делает его нечувствительным к внешним силам, и увеличивает критическую тангенциальную скорость; страхующие шарикоподшипники, т.е. ограничивающие максимальное отклонение ротора; хорошая балансировка и концентрическая установка ротора относительно статора; истираемые или плавящиеся покрытия; увеличенные рабочие зазоры, даже если узкие зазоры очень целесообразны с термодинамической точки зрения, т.е. не следует реализовывать максимальную эффективность вместо надежной работы.

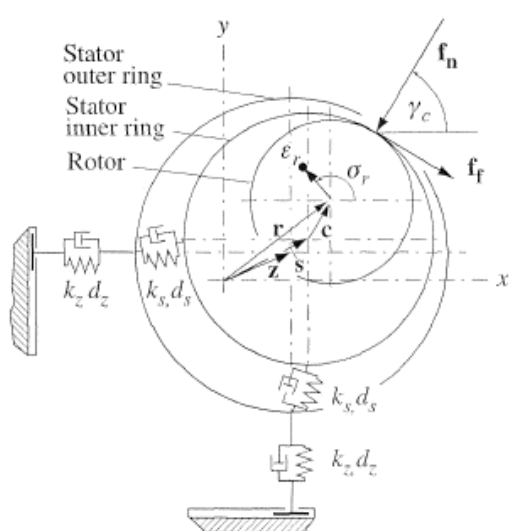


Рис. 11. Модель Барты из двух вложенных друг в друга колец вокруг ротора (в центре) для учета влияния второй моды статора на параметры обкатки

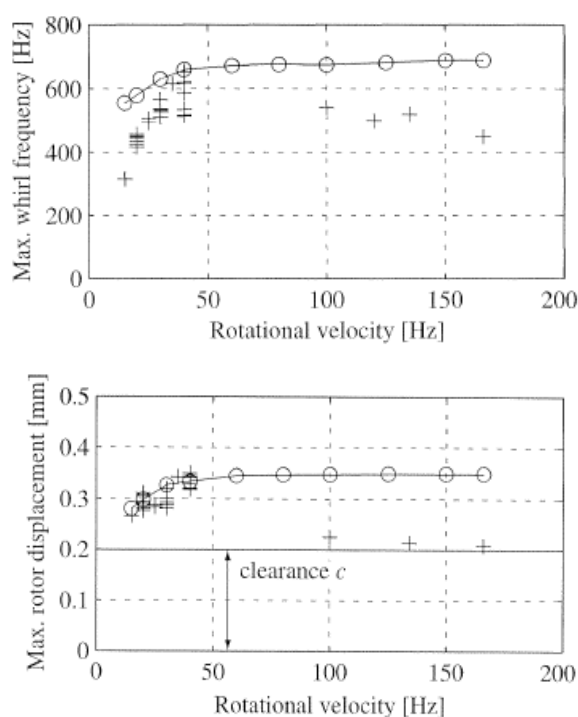


Рис. 12. Результаты численного моделирования (линии с кружками) и опытов (крестики)

Дянгуй [Diangui, 2000] измерил частотные характеристики крутильных колебаний ротора при трении о статор с помощью зубцов на дисках (ротора), в т.ч. чтобы задать начальную точку каждого периода вращения и получить временной ряд прихода каждого зубца. Интервал времени между зубьями представляет собой суперпозицию ωt , крутильных отклонений $\Delta\varphi$ и поперечных колебаний в вертикальном направлении к датчику. Тем самым его установка, показывая точную поперечную вибрацию, одновременно позволяла различать угол крутильных колебаний 0.0018° . Измеренная собственная частота кручения ротора с трением о статор (f_{rub}) всегда выше, чем таковая без трения (f_{ori}), поскольку роторная жесткость на кручение увеличивается из-за контактного трения. Однако частота f_{rub} ограничивается наибольшим значением ($f_{\text{rub}}^{\text{max}}$) при увеличении частоты вращения (x). При этом: если $x > f_{\text{rub}}^{\text{max}}$, то возникают крутильные колебания с двумя компонентами $f_{\text{rub}}^{\text{max}} = \text{const}$ и $1x$; если $f_{\text{ori}} < x < f_{\text{rub}}^{\text{max}}$, то наступает резонансная крутильная вибрация; если $x < f_{\text{ori}}$, то возбуждаются крутильные колебания с увеличивающейся вместе с x частотой f_{rub} , а также с частотами $1x$, $2x$ и $3x$.

С целью поиска местоположения контактного трения в многодисковой роторной системе Чу и Лу [Chu2001] предположили упрочняющее действие, вызванное ударом ротора по статору, с самым сильным эффектом в районе, в котором непосредственно происходит задевание. Развивая эту идею, они рассчитали методом Рунге-Кутты данные о подобных поперечных колебаниях и определили методом наименьших квадратов на различных участках ротора изгибную жесткость как переменную, включая в эту динамическую жесткость эффекты удара и трения. В результате получено, что динамическая жесткость на участке, на котором совершается контакт, увеличивается по мере того, как развивается трение, а динамические жесткости в других частях (ротора) изменяются очень мало. Также обнаружено, что при прекращении задевания динамическая жесткость на контактном участке немедленно падает до исходного значения.

Фон Гроль и Юинс [Groll, 2001] предложили вычислительную методику, основанную на методе гармонического баланса, для расчета периодического отклика нелинейной системы «ротор-статор» при типичном периодическом возбуждении (с частотой вращения). Их подход также вычисляет устойчивость найденных периодических решений. Конечно, бывают ситуации, когда методом гармонического баланса не находятся решения, и обычно это указывает на то, что для системы взято недостаточно или не хватает правильных гармонических составляющих. Более того, тот факт, что решение было получено, не означает достаточное условие, что не были пропущены никакие важные частотные компоненты. Однако в их методике штрафная жесткость k_c определяет силу ударов ротора / статора (в т.ч. со значительной массой и, следовательно, динамикой сами по себе) и таким образом проверяет надежность и задает быстроту сходимости при любом выбранном методе.

Фен и его коллега [Feng, 2002], обсуждая различные движения при трении простого дискового ротора о неподвижный статор, вызванные случайными возмущениями, пришли к ряду заключений. 1) В большинстве случаев контакт сохраняется даже после того, как возмущения исчезли, более того, начальное и единственное возмущение может вызвать «притяжение» ротора к статору. 2) Синхронное скольжение и обкатка не происходят при докритической роторной скорости, если зазор больше, чем установившийся поперечный ход ротора, тем не менее, и в отличие от результатов многих предыдущих исследователей, эти безотрывные движения являются более частыми явлениями, чем хаос, для роторов, не работающих вблизи своего резонанса. 3) В течение обычного переходного (ударного) процесса временной интервал между двумя контактами становится все короче и короче, и ротор в итоге ложится на статор, что аналогично мячу, прыгающему по поверхности, который в конце концов оказывается на ней. А когда это происходит, событие постоянного контакта уже нельзя описывать часто используемой ньютоновской

моделью, включающей коэффициент восстановления, и должна применяться другая модель, в которой статор представляет собой пружину с амортизатором.

Лейне с др. [Leine, 2002] сравнительно просто смоделировали сложное движение бурильной колонны с сосуществованием как периодической закрутки из-за залипания-скольжения (torsional stick-slip submodel), так и поперечной прямой полускоростной или обратной прецессии (whirl submodel). Подробно представляя устройство и работу колонны, они полагают, что: 1) во второй подмодели ротора угловая скорость ω постоянна (крутильная вибрация отсутствует); 2) причиной взаимодействия соответствующих крутильных и изгибных колебаний, а также перехода прямого прецессионного движения к обратному (к обкатке) являются не только контактные силы, но и силы окружающей жидкости. Как выяснилось, закрутка с залипанием-скольжением происходит при низких угловых скоростях, а обкатка – при высоких, более того обе возможны при одном и том же значении ω , однако комбинированное движение (периодическое закручивание с обкатыванием) получено только численными расчетами и в очень малом интервале ω , т.е. оно встречается редко или не существует. Все эти результаты согласуются с также демонстрируемыми данными экспериментов.

Ю. Голдман, Бентли и Мушинска [Yu, 2002] проделали масштабную экспериментально-теоретическую работу относительно влияния дисбаланса, статорной жесткости (щелевого уплотнения) k_s , коэффициентов внешнего демпфирования $d = c/2\sqrt{k_r m_r}$ и сухого трения μ на переход от синхронного скольжения к качению с обратной прецессией и проскальзыванием. Так, при малом μ (когда на контактных поверхностях имелась смазка) горизонтальный ротор устойчиво скользил по поверхности уплотнения без качения с синхронной угловой скоростью за исключением собственного резонансного диапазона, где он не контактировал с уплотнением постоянно и совершал скачки по амплитуде и фазе колебаний. Явление скачка связано

с неустойчивой ветвью найденного аналитически синхронного решения. При устойчивом синхронном скольжении ими отмечен эффект «третьего подшипника» с соответствующим изменением формы колебаний ротора. При достаточном μ обкатка может возникать во время разгона или останова после начала неустойчивого синхронного скольжения, как правило, при скорости вращения в окрестности критической $\omega_r = \sqrt{k_r/m_r}$, без каких-либо внешних воздействий, в т.ч. при малом отношении радиуса ротора к зазору в контактном месте (порядка 40). Она также может быть вызвана внешним импульсом независимо от дисбаланса и поддерживаться выше очень низкой скорости, например, с десяти процентов критической $0.1\omega_r$. На стенде реализация обкатывания была легче в случае жесткого закрепления уплотнения, чем при упругом. После установления обкатки амплитуда и угловая частота Ω обратной прецессии почти не изменяются во всем диапазоне скоростей, в частности:

$$\frac{\Omega}{\omega_r} = -\frac{d}{\mu} - \sqrt{1 + \frac{d^2}{\mu^2}}.$$

При этом получены независимые от дисбаланса критерии устойчивости для обратного и прямого движения:

$$\frac{d}{\mu} < \frac{k_s/k_r}{2\sqrt{1+k_s/k_r}}, \quad \frac{d}{\mu} > \frac{k_s/k_r}{2\sqrt{1+k_s/k_r}},$$

а также показано, что $|\Omega|$ всегда выше ω_r и ниже собственной частоты ротора с добавленной жесткостью уплотнения $\sqrt{(k_r + k_s)/m_r}$.

Коул и Кио [Cole, 2003] аналитически спрогнозировали возможные стационарные движения многомодового ротора при асинхронно-периодических ударах о жесткий статор, путем преобразования матричных уравнений в инерциальных координатах во вращающуюся систему отсчета и гармонического разложения, в котором основной частотой была несинхронная частота контакта (ротора со статором). Ими установлено ожидаемое,

во-первых, слабозатухающие моды гибкого ротора увеличивают множество возможных контактных форм колебаний в высокочастотном диапазоне. Во-вторых, во всех рассмотренных виброударных движениях амплитуда отскока между контактами возрастает с увеличением силы дисбаланса; от некоторой минимальной для существования каждой контактной динамики до максимальной, выше которой прямая прецессия ротора переходит в опасную обратную с полным кольцевым трением о статор. Как следствие, в-третьих, движение неуравновешенного ротора в неподвижной системе отсчета является подпрыгивающим, которое по мере увеличения дисбаланса становится всё более обратным.

Савицки и др. [Sawicki, 2003], объединив в своей математической модели уравнения теплопроводности и синхронного движения гибкого ротора с полным кольцевым трением о податливый статор, численно получили во вращающейся системе координат характерные спиральные роторные колебания, т.е. неустойчивые и нарастающие по амплитуде и фазе. При этом для отслеживания устойчивости ротора, который имеет несколько степеней свободы и подвержен тепловому изгибу из-за трения, предложена матричная процедура, основанная на анализе действительных частей собственных частот системы.

Павлов с Бородиным [Павлов, 2004, Бородин, 2004, Павлов, 2005] численно решали задачу о качении несбалансированного жесткого ротора на двух упругих опорах по жесткому статору в различных постановках – без и с учетом внешнего демпфирования, статорной подвижности, проскальзывания между ними, а также в случаях вертикальной и горизонтальной оси вращения. Их расчеты, в т.ч. на основе введенного малого параметра и критерия Гурвица, показывают, что ротор (обкатывающий статор) совершает интенсивные пространственные колебания, причем нутационное движение сравнимо с прецессионным. Более того, нутационные колебания носят симметричный и субгармонический характер, происходят с постоянной фазой, а их амплитуда

ограничена и стремится к фиксированному значению, т.е. существует устойчивый предельный цикл, а также присутствуют комбинационные частоты, порождающие основной параметрический и 3-го порядка резонансы. Согласно их анализу роторного движения, изменение жесткости опор в пределах практической реализации несущественно влияет на границы устойчивости, заметнее влияние асимметрии установки диска на валу. Также возможна перекачка энергии нутационно-прецессионных колебаний во вращательное движение, т.е. неуравновешенность может быть причиной неравномерности вращения ротора.

Цзян и Улбрих [Jiang, 2005] заявили, что обкатывание может возникать исключительно из-за дисбаланса, когда скорость вращения достигает определенного значения, и никакие внешние возмущения/воздействия для этого гибкому ротору массой m и жесткостью k_r в жесткозакрепленном статоре с упругой поверхностью жесткостью k_b не нужны. К такому выводу они пришли, разыскивая решение уравнения движения системы с безразмерными и комплексными величинами в простейшем виде: $W = X + iY = H e^{i\omega_0 \tau}$, где $\tau = t\sqrt{k_b/m}$, X и Y – отнесенные к размеру эксцентриситета поперечные отклонения роторного центра, ω_0 и $H = |W|$ – безразмерные действительные постоянные (частота и амплитуда), удовлетворяющие равенствам: $\omega_0 = -\zeta/\mu - \sqrt{k_r/k_b + \zeta^2/\mu^2}$, $H = \bar{\delta}/(1 + 2\omega_0\zeta/\mu)$, где $2\zeta = c/\sqrt{k_b m}$ – демпфирование в системе, $\bar{\delta}$ – отнесенный к размеру эксцентриситета радиальный зазор. Так как для выборки зазора амплитуда H должна быть больше $\bar{\delta}$, и как следствие, знаменатель H должен быть меньше 1, но больше 0, сформулировано также необходимое условие существования обкатки: $\zeta/\mu < 1/(2\sqrt{1 + k_r/k_b})$. Далее, обсуждая результаты численных расчетов, ими отмечено, что роторные орбиты, углы падения и отделения (разрыва контакта со статором) не позволяют объяснить физическую причину начала обкатки за

счет дисбаланса, напротив, полные спектры колебаний ротора и фазовые углы позволяют это сделать. Так, при относительно низких скоростях модельный неуравновешенный ротор поддерживает отрицательную фазу в синхронном скольжении; а именно с отставанием прогиба от эксцентриситета ротора. Второй аспект служит возбуждением и провоцирует прямую прецессию (ротора), хотя система «ротор-статор» находится в безотрывном контакте и обладает «естественной» модой с отрицательной частотой. Соответствующее скромное присутствие последней в полном спектре не сказывается на модельной системе, так как в ней другого «механизма обратного возбуждения» нет, и в свою очередь, фазовый угол «отстает» и немного колеблется в отрицательном диапазоне. При увеличении скорости синхронное скольжение сменяет виброударное движение. Тем временем, колебания фазового угла происходят между отрицательным и положительным диапазонами. Причем во втором из диапазонов дисбаланс создает возбуждение в обратном прецессионном направлении, вызывая рост пика отрицательной «естественной» частоты связанной системы «ротор-статор». Наконец, когда скорость вращения критически сближается с $\sqrt{k_b/m}$ (граница DW на авторских диаграммах устойчивости в этой и последующих работах [Jiang, 2009], [Shang, 2011]), ротор будучи в окрестности резонанса на отрицательной «естественной» частоте связанной системы срывается в обкатку статора, что и является физической причиной её возникновения.

Эхехальт с коллегами [Ehehalt, 2006] сравнили результаты численного интегрирования и аналитического решения уравнений движения ротора Джеффкотта по смещающемуся безынерционному статору, принятого в оригинальном виде:

$$z = x + iy = \rho_{\omega} e^{i\omega t} + \rho_{\Omega} e^{i\Omega t} = (\rho_{\omega} + \rho_{\Omega} e^{i(\Omega-\omega)t}) e^{i\omega t},$$

где ρ_{ω} – комплексная амплитуда синхронного движения (синхронной компоненты роторной прецессии), ρ_{Ω} – комплексная амплитуда несинхронного

движения (асинхронной компоненты роторной прецессии). При этом $|\rho_{\Omega}-\rho_{\omega}|>\delta$, а также введен ряд допущений $|\rho_{\omega}| \ll |\rho_{\Omega}|$, $\Omega < 0$ и:

$$|z| = |\rho_{\omega} + \rho_{\Omega} e^{i(\Omega-\omega)t}| \approx |\rho_{\Omega} e^{i(\Omega-\omega)t}| = |\rho_{\Omega}|.$$

Кроме того, вследствие последнего предположения все искомые абсолютные роторные амплитуды удовлетворяют неравенству $|\rho_{\Omega}|>\delta$. В итоге численно и в общем виде определены, помимо вещественных $|\rho_{\Omega}|$, которые круто возрастают с увеличением коэффициента трения скольжения μ , а также с уменьшением коэффициента конструкционного демпфирования b_R : пороговый μ_{th} , ниже которого обкатывание не случается; действительные в математическом-физическом смысле значения частоты обкатки Ω , которые не зависят от частоты вращения ω , слабо изменяются с μ и b_R , но сильно изменяются с отношением жесткостей статора и ротора k_S/k_R . В частности, при повышении k_S/k_R от 1 до 5 значение Ω почти удваивается, а значение $|\rho_{\Omega}|$ возрастает примерно в 6 раз. Напротив, при $k_S/k_R < 0.5$ и $b_R/(2\sqrt{k_R m_R}) > 0.2$ величины Ω и $|\rho_{\Omega}|$ недействительны, т.е. обкатка с обратной прецессией не существует. Абсолютная амплитуда синхронного движения ротора $|\rho_{\omega}|$ зависит от ω и b_R , причем её максимум происходит при $\omega \approx |\Omega|$, т.е. ведет себя аналогично осциллятору с одной степенью свободы. Более того, при $\omega \approx |\Omega|$ в аналитическом решении $|\rho_{\omega}|$ соизмерима с $|\rho_{\Omega}|$, а в численном: $|\rho_{\omega}|$ повторяет АЧХ нелинейного жесткоупругого осциллятора и $|\rho_{\Omega}| \rightarrow 0$, поэтому авторы справедливо отмечают, что в окрестности $\omega \approx |\Omega|$ предложенное ими приближение не работает.

Грапис с соавторами [Grāpis, 2006] смоделировали ситуацию внезапной потери ротором небольшой массы, но отсутствие которой впоследствии вызывает значительный дисбаланс и удары диска, симметрично расположенного на жестком валу с двумя упругими подшипниками по концам, о податливую поверхность жесткого статора. Их численные расчеты методом Рунге-Кутты показывают, что за ударами может случиться сначала

«медленное» качение ротора по статору с одновременным скольжением и угловой скоростью обратной прецессии, соразмерной по модулю с начальной скоростью вращения ($f_{\text{ном}}=150\text{Гц}$), а затем «быстрое» качение без проскальзывания с прецессионной частотой $\Omega \approx 770\text{Гц}$. При этом развитие всего такого процесса после первого столкновения происходит очень быстро – в течение нескольких сотых секунды. За это время сильно уменьшается скорость вращения – примерно в 3 раза. Одновременно с падением угловой скорости ротора резко возрастает нормальное контактное усилие между ним и статором – моделируемый ротор массой всего 5 кг нагружается постоянной силой $\approx 400\text{кН}$, что намного больше периодических радиальных сил, возникающих при ударах. По словам авторов, процесс напоминает взрыв из-за его очень быстрого развития и внезапной огромной динамической нагрузки. Основной причиной катастрофического развития событий в системе назначается высокий коэффициент трения на трущихся поверхностях ротора и статора.

Чайлдс и Бхаттачарья [*Childs, 2007*], по-видимому, впервые предсказали с помощью теоретической многомодовой модели ротора, как балки Эйлера с дифференциальным уравнением в частных производных и произвольным расположением по его длине места контакта со статором, несколько возможных диапазонов обкатки. Однако реализованное ими численное решение уравнений для переходных системных процессов во времени, с учетом нескольких форм собственных колебаний, как ротора, так и статора, включая задание нормальной силы по Ханту-Гроссли [*Hunt, 1975*] и отслеживание знака для кулоновской силы, выдаёт лишь один диапазон с одной частотой обкатки с проскальзыванием, близкой к первой собственной связанной системы «ротор-статор». Более того, это состояние сохраняется до довольно высоких скоростей вращения и не переходит, как предполагалось, к более высоким частотам обкатывания. В полученном диапазоне происходит даже плавное изменение частоты обратной прецессии при переходе от чистого качения к

качению со скольжением. Правда последнее авторы сами объясняют тем, что скорость обкатки без проскальзывания зависит от отношения роторного радиуса к фактическому зазору, который включает деформацию ξ поверхностей ротора/статора и увеличивается вместе с ней с увеличением скорости вращения $|\Omega| = \omega r / (\delta + \xi(\omega))$.

Халиф с др. [Khulief, 2007] оригинально смоделировали буровую систему, предназначенную для сверления глубоких скважин, несмотря на такой существенный недостаток, что их конечно-элементная модель не учитывает конструкционное трение в валопроводе (хотя бы в виде линейного и пропорционального модального демпфирования) и вязкое сопротивление за счет взаимодействия вращающегося бура с породой (глиняно-известняковым пластом). Достоинством их динамической формулировки является одновременный учет осевых, изгибных и крутильных колебаний, гироскопических моментов и сухого трения с залипанием-скольжением на конце бура. Численным интегрированием соответствующих матричных уравнений ими продемонстрировано, что последнее вызывает интенсивные крутильные колебания буровой системы. Так, угловые скорости на концах валопровода отличаются примерно в три раза, крутящий момент пульсирует с относительно небольшой амплитудой, но с весьма высокой частотой.

В роторных системах с магнитными подшипниками для предотвращения контакта (ротора с магнитами), как правило, используются вспомогательные или страхующие втулки с подходящим (чуть меньшим) радиальным зазором. Однако так называемое «падение» ротора на эти втулки остается опасным в том смысле, что контактное трение может вызвать обратное безотрывное движение с контактными усилиями, значительно превышающими грузоподъемность магнитных подшипников. Это означает, что после установления обкатывания невозможно будет через активное управление восстановить центральное положение и бесконтактное движение ротора. Вместе с тем электромагнитное восстановление левитации ротора возможно в случаях синхронного скольжения

и виброударных движений [Keogh, 2006]. В случае пассивного магнитного подшипника, чтобы гарантированно уменьшить силу контактного трения и вероятность обкатки, вместо втулки рекомендуется использовать подшипник качения, внутреннее кольцо которого приходит во вращение после всякого контакта с шейкой ротора [Pust, 2007]. Пусть, учитывая это вращение как дополнительную степень свободы в математической модели, показал, что внутренние кольца страхующих шарикоподшипников вращаются в зависимости от интенсивности ударов с перерывами или постоянно, сопровождая либо квазипериодические, либо хаотические движения ротора.

Шэнь с партнерами [Shen, 2007] справедливо замечают, что существуют два вида неуравновешенности – массовый эксцентриситет и начальный прогиб гибкого ротора, приводящий к его статической несоосности относительно неподвижной части системы. В связи с этим на примере ротора Джеффкотта в жестком статоре они сформулировали показатель отсутствия контактного трения при любой скорости вращения:

$$D = \frac{(1 - 2\xi^2 + \varepsilon \hat{r}_0 \cos \alpha)^2 - (\varepsilon^2 - 1)(\hat{r}_0^2 - 1)}{(\varepsilon^2 - 1)^2} < 0,$$

где $\varepsilon = a/\delta$ – относительный массовый эксцентриситет, $\hat{r}_0 = r_0/\delta$ – относительный начальный прогиб, $\xi = c/(2\omega_0 m)$ – относительный коэффициент демпфирования, α – фиксированный (фазовый) угол между направлениями a и r_0 . Если $D > 0$, то контактное трение будет, причем начинаться при относительной скорости:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{-\frac{1 - 2\xi^2 + \varepsilon \hat{r}_0 \cos \alpha}{\varepsilon^2 - 1}} - \sqrt{D}.$$

Из этих соотношений следует – чем меньше фаза α и/или демпфирование c , а также чем больше начальный прогиб r_0 и/или эксцентриситет a , тем раньше, т.е. при меньшей скорости вращения ротора, возникнет задевание.

Коул [Cole, 2008] вывел ряд линейных матричных неравенств, представляющих собой необходимые и достаточные условия устойчивости динамики стационарно вращающегося неуравновешенного изотропного ротора с несколькими степенями свободы, контактом и трением по статору, отталкиваясь от известных моделей подобных систем. Привел пример конструкции, показывающий как можно оптимизировать параметры по этим условиям в пространстве состояний для предотвращения опасной вибрации. Свой математический анализ он начинает с введения параметра θ для зависимости нормальной силы f от контактных смещения r и жесткости k :

$$f = -\frac{k}{1 + i \tan \theta} r.$$

Это ему помогает выяснить, как два общих предположения – либо что $\theta = \tan^{-1} \mu$, которое означает совпадение с углом контактного трения и смещение круглой поверхности статора в направлении f , либо что $\theta = 0$, которое представляет локальную статорную деформацию в направлении нормали контакта – могут привести к различным выводам о существовании решений уравнений контактного движения с предельным циклом. При этом с помощью частотно-зависимой динамической податливости $g(\omega)$ для связанной системы «ротор-статор» он показал, что отрицание существования эквивалентно графику Найквиста, избегающему определенных критических областей на комплексной плоскости $\text{Re}g(\omega)$, $\text{Im}g(\omega)$, определяемой k , μ и θ . В частности, им устанавливается контактная жесткость для предотвращения обкатки, значение которой для её потенциальной неустойчивости ожидаемо снижается по мере увеличения трения скольжения или уменьшения демпфирования ротора. Примечательно, что частота «обкатного решения» также падает, и что тогда легче вызвать обратную прецессию. Также им устанавливается более сильное требование, чем защита от обкатки, сводящееся к тому, что если трение ротора о статор не происходит во время нормальной работы, то после любых переходных состояний, приводящих к контакту, ротор всегда возвращается в

бесконтактное состояние. Однако второе труднее реализовать в практической конструкции.

Численные и экспериментальные исследования Пателя и Дарпе посвящены поперечным [Patel, 2008], а также связанным изгибно-крутильным [Patel, 2009] колебаниям гибкого неуравновешенного ротора при отсутствии и наличии в нём поперечной усталостной трещины, и в то же время при неполном кольцевом трении о локально деформируемый статор. Колебания рассмотрены и соответственно анализ достоверен для всех скоростей вращения вплоть до половины основной изгибной критической скорости ротора без трещины. Так, благодаря их уходу от быстрого Фурье-преобразования вибрации в одном из поперечных направлений к полному спектру прецессии или орбитального движения, из полученных ими результатов вытекает следующее. Бесконтактное синхронное прецессионное движение ротора с трещиной характеризуется асимметричным полным спектром, в т.ч. со значительными компонентами $1X$, $2X$ и низкими компонентами $-1X$, $-2X$. Прямое контактное движение ротора без трещины, вращающегося с частотой X и задеванием за статор, приводит к почти симметричному полному спектру (с фактически одинаковыми положительными и отрицательными спектральными составляющими для одного порядка), в т.ч. с соразмерной компонентой $-1X$ и без малого равными высокими пиками $+2X$ и $-2X$. Прямое движение ротора с частотой X , трещиной и задеванием за статор дает кососимметричный полный спектр, в т.ч. с сильными составляющими $1X$, $-2X$ и слабыми составляющими $-1X$ и $2X$. Особенность изгибно-крутильной вибрации неуравновешенного ротора с трещиной и неполным кольцевым трением о статор [Patel, 2009] в том, что «торсионная компонента не присутствует» в частотном спектре соответствующих связанных колебаний в поперечном направлении. Более того, она явно не присутствует и в спектре частот в окружном направлении в отличие от бесконтактного случая. Ротор, вращающийся с частотой ω , трещиной и без задевания за статор,

показывает в спектре крутильных колебаний высокие пики на гармониках 1ω и 2ω , а также на основной собственной частоте кручения ω_t , модулированной на $\frac{1}{2}\omega$, т.е. ещё на частотах $\omega_t - \frac{1}{2}\omega$, ω_t и $\omega_t + \frac{1}{2}\omega$, а другие частоты проявляются относительно слабо. Однако «крутильный спектр того же треснувшего ротора» при неполном кольцевом трении о статор имеет сильные гармоники $n\omega$ с тенденцией убывания по амплитуде по мере увеличения порядка, т.е. n , и локального нарастания тех супергармоник, которые оказываются в непосредственной близости от ω_t . Очевидно, контакт влияет на поперечные колебания (стесняя их), которые влияют в свою очередь на крутильные (возбуждая их вследствие супергармонического резонанса), а обратная цепочка связей между ними отсутствует.

Бхаттачарья и Чайлдс [Bhattacharya, 2009] установили влияния на возможные частоты обкатки таких специфических параметров как: положительной и отрицательной перекрестной жесткости k_c (положительных побочных коэффициентов $k_{xy} = -k_{yx} = k_c$ и отрицательных $k_{xy} = -k_{yx} = -k_c$) и прямого демпфирования C (главных коэффициентов $c_{xx} = c_{yy} = C$) гидравлического кольцевого уплотнения или подшипника с жидкой пленкой, демпфирования c_s в подвеске (опоре) статора, а также величины d , пропорциональной гироскопическим моментам ротора. Учитывая их поочередно в системе «гибкий ротор – подвижный статор», они получили ряд графических решений, подобных U-образной кривой Блэка [Black, 1968], для коэффициента трения μ , необходимого для поддержания обкатки в зависимости от частоты обратной прецессии. Их решения показывают: 1) U-кривые перемещаются вверх и сужаются с увеличением как k_c , так и C и c_s , тем самым соответственно, повышая значения μ , необходимые для реализации обкатки, и уменьшая диапазон возможных частот сопряженной обратной прецессии, т.е. чем больше k_c , C и c_s , тем ниже вероятность обкатывания; 2) U-кривые смещаются влево с увеличением d , т.е. к более низким прецессионным частотам (обкатки) с ростом

гироскопического эффекта, однако при $d > 1$ в основном частотном диапазоне системы (ниже собственной частоты статора) вместо одной широкой образуются две узкие полосы возможных частот обкатки; 3) при малом $\mu < 0.1$ и отрицательной k_c или значительном c_s , а также при $d > 1$ возможно обкатывание с частотой, которая ближе к собственной роторной, вычисленной при нулевой скорости вращения ($\omega = 0$), чем к собственной системной, вычисленной при нулевом зазоре и $\omega = 0$. Вместе с тем авторы заключают: а) реализация на практике отрицательных значений k_c для повышения обычной роторной динамической устойчивости может потенциально сделать машины более восприимчивыми к обкатке при задевании ротора за статор; б) на сегодняшний день, чтобы исследовать устойчивость и интенсивность обкатывания, в т.ч. чтобы проверить вышеперечисленные эффекты в случаях высоких значений перекрестной жесткости (по модулю), демпфирования и скоростей вращения с соответствующими гироскопическими моментами, требуется моделирование нелинейных переходных процессов.

Цзян [Jiang, 2009] выявил существование пяти, в т.ч. три типа сосуществования, различных откликов ротора Джеффкотта, взаимодействующего с упругой поверхностью жесткого статора. Картина общих характеристик-состояний системы составлена после аналитического решения её исходных кусочно-гладких уравнений по частям, соответствующих трем различным движениям ротора – в случаях без контактного трения, синхронного скольжения и качения не обязательного чистого. Фактически обобщенные характеристики-состояния системы «ротор-статор» определены после установления границ существования / устойчивости каждого из этих движений, которые он включил в одно и то же пространство наиболее влияющих параметров Ω - β (рис. 13).

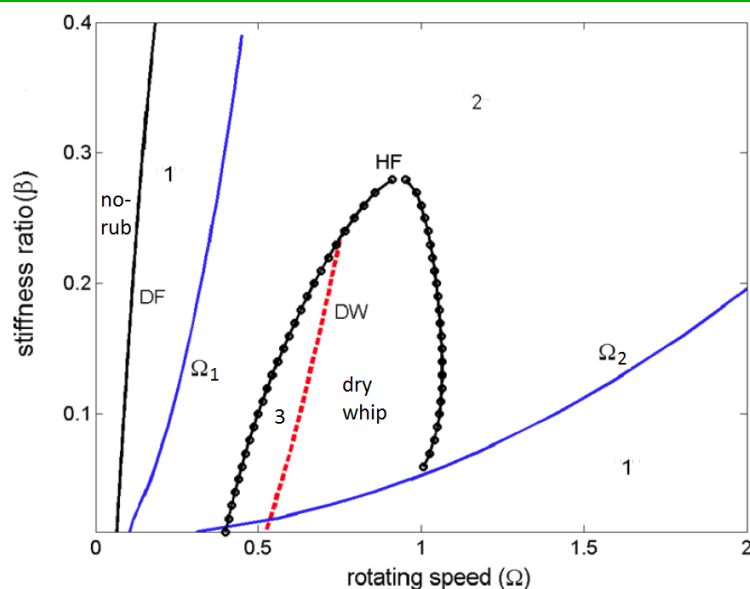


Рис. 13. Характеристики-состояния системы на плоскости параметров «безразмерная скорость вращения (Ω) – отношение жесткости ротора к жесткости поверхности статора (β)»:

Ω_1 и Ω_2 – скорости вращения, при которых поперечное смещение ротора перекрывает радиальный зазор;

HF – граница бифуркации Хопфа для решения, которое соответствует синхронному скольжению;

DW – граница, на которой обкатка с проскальзыванием возбуждается за счет дисбаланса, и виброударное движение перестает существовать;

DF – граница существования любой обкатки
(без или в случае проскальзывания);

no-rub – область существования бесконтактного движения;

dry whip – область существования обкатки с проскальзыванием;

1 – область сосуществования бесконтактного движения и любой обкатки;

2 – область сосуществования синхронного скольжения и любой обкатки;

3 – область сосуществования виброударного движения и любой обкатки.

Как видно, во-первых, обкатка, существуя во всей области справа от линии DF, сосуществует с тремя другими исследованными состояниями ротора.

Причем в области «1», «2» и «3» из-за сосуществования прецессионных движений, совершающихся с разной частотой, будет происходить явление «скачка». Еще хуже то, что имеется ограниченная кривыми DW и Ω_2 область «dry whip», т.е. где обкатка с проскальзыванием является единственной стабильной реакцией. Во-вторых, за счет увеличения коэффициента β (что может быть, как уменьшение жесткости статора при сохранении жесткости ротора неизменной, т.е. при использовании мягкого статора) свыше определенного значения (на рис.13 когда $\beta \geq 0.3$), синхронное скольжение больше не будет разветвляться на более опасное виброударное движение. Но ещё более важно, не будет инициироваться качение с проскальзыванием из-за дисбаланса. Другими словами, дисбаланс больше не сможет запускать разрушительную обкатку, и в этом смысле более высокий коэффициент β улучшает поведение ротора.

Чжан с партнерами [Zhang, 2009] получили точные и приближенные решения для синхронного скольжения ротора Джеффкотта по жесткозакрепленному (аналитически) и упругозакрепленному статору (численно). При этом для обоих случаев сформулированы и использованы оригинальные тождество, определяющее контактную жесткость k_k их поверхностей, а также критерии существования и устойчивости. Согласно этим критериям, в т.ч. $\mu\bar{\Omega}/\zeta < 1$ – основному из них и рекомендованному инженерам-конструкторам, эквивалентная жесткость (k_k), роторный эксцентриситет и массовое отношение (статора к ротору) не играют важной роли в стабильности, напротив, безразмерная скорость вращения ($\bar{\Omega}$), как относительная к первой роторной критической, коэффициенты контактного трения (μ) и конструкционного демпфирования (для ротора ζ и статора ζ_s), а также отношение поперечных жесткостей (статорной к роторной) – пять важных параметров, чтобы управлять стабильностью синхронного скольжения.

Инновации 10-х гг.

Рокес и др. [Roques, 2010] проанализировали переходные процессы гироскопического ротора, поддерживаемого линеаризованными подшипниками, вместе с изгибными и крутильными деформациями вала из-за контактного трения в лопаточном аппарате (исходного турбогенератора). Определяя скорость вращения из одновременного решения с другими уравнениями движения, они указали на следующее. Крутильные колебания слабо влияют на максимальную нагрузку, действующую на подшипники со стороны вала, и фактически нужны лишь для оценки крутильных напряжений вдоль вала. Роторные нагрузки на подшипники в большей степени зависят от моделирования контактного взаимодействия лопаточного аппарата. Жесткие лопатки переоценивают контактные нагрузки между валом и статором, и, следовательно, недооценивают динамические нагрузки на подшипники. Смещения гибких лопаток из-за трения больше, чем у жестких моделей, и отсюда увеличение поперечной вибрации вала и нагрузок на подшипники.

Уилкс и соучастники [Wilkes, 2010] впервые экспериментально продемонстрировали чередование нескольких диапазонов (форм) обкатки без и с присутствием проскальзывания. Во время ускорения и замедления ротора, а также независимо от зазора δ и материалов в месте контакта его со статором, каждый переход сопровождался скачком скорости обратной прецессии. Их успех связан с реализованным импульсным радиальным возмущением, т.е. с влиянием необходимых и достаточных начальных условий. Наряду с ударным возмущением, ими предполагается, что каждую следующую форму обкатки могут возбуждать в результате опорных асимметрий и нелинейностей «боковые-кратные» частоты выше и ниже Ω , т.е. сопровождающие доминирующую-основную частоту обкатки, которая в свою очередь может быть равной отношению fr/δ или постоянной и близкой к одной из собственных частот связанной системы «ротор-статор». Зарегистрированные амплитуды

обратных прецессий ротора, причем всеми размещенными по его длине датчиками, в диапазонах обкатки без проскальзывания монотонно повышаются с частотой вращения f , однако в диапазонах обкатки с проскальзыванием остаются постоянными, несмотря на изменение f . Вместе с тем прецессионные частоты и амплитуды, предсказанные конечно-элементной моделью ротора со статором, которую они также построили, совпали с измеренными лишь частично. Теоретически не получена форма обкатки, наблюдавшаяся в диапазоне между первой и второй изгибными модами ротора и сопровождавшаяся большими смещениями опор, т.е. связанная со статорной модой. Также ими отмечено неожиданное существенное расхождение по величине r/δ , которая постоянна в теории и увеличивалась при останове в экспериментах, особенно (почти вдвое) в случае баббитовой контактной поверхности статора. Авторы связали это с тепловыми эффектами.

Кумар и Чайлдс [Kumar, 2010, Childs, 2012], обратив внимание на неисправный анемометр, движение оси которого напоминало след спирографа, аналитически и численно смоделировали его работу с двумя контактными местами как однодискового жесткого ротора в упруго-закрепленном жестком статоре, рассматривая три варианта расположения диска (рис. 14) и две возможные формы обкатки.

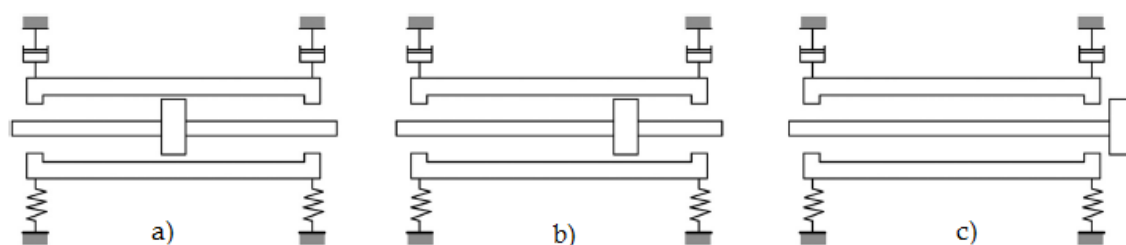


Рис. 14. Модель Кумара-Чайлдса для жесткого вала с диском по центру (а), на расстоянии $\frac{3}{4}$ длины вала (b) и на консоли (с), опертго по концам с зазорами на жесткий статор

Первая прецессионная мода с предполагаемыми синфазными слева и справа контактными точками, вторая – противофазными местами контакта. Исходные собственные частоты чисто поступательных (чисто угловых) колебаний (Гц) ротора 0 (0), статора 105 (145), связанной (беззазорной) системы $82 \div 88$ ($115 \div 134$). В результате при одинаковых зазорах слева δ_l и справа δ_r , таких что $r/\delta_l = r/\delta_r = 100$, модельные «а» и «b» роторы продемонстрировали как чистое качение, так и обкатывание с проскальзыванием и частотой порядка 80 Гц, т.е. обратную цилиндрическую прецессию по первой форме, а с-ротор выдал только обкатку со скольжением, причем с частотой перемещений на правом более нагруженном конце порядка 80 Гц и на левом – близкой к 115 Гц, т.е. обратную коническую прецессию по второй форме. При неодинаковых зазорах, таких что $r/\delta_l = 100$ и $r/\delta_r = 125$ или $r/\delta_l = 125$ и $r/\delta_r = 100$, контактная динамика ротора «с» была фактически аналогичной, а роторов «а» и «b» стала немного другой, такой что всего лишь не совершилось чистое качение. Кроме того, внесение дисбаланса не дало существенных изменений.

Зиаи-Рад и др. [Ziaei-Rad, 2010] предложили трехмерную конечно-элементную формулировку (посредством четырехузловых четырехгранных элементов) для комплексной проблемы синхронного скольжения и теплового изгиба ротора внутри статора. Интегрируя составленные уравнения системы, в т.ч. определяя в ней на каждом временном шаге контактные силы давления и трения, распределение температуры, эквивалентный изгибающий момент и прогиб ротора, они теоретически описали давно известный экспериментальный факт-эффект Ньюкирка. На скоростях ниже первой критической два источника возбуждения системы в виде векторов остаточного дисбаланса и теплового прогиба образуют острый фазовый угол между собой и вызывают увеличивающуюся спиралевидную вибрацию. На скоростях выше первой критической эти два возбуждения оказываются противоположными по фазе и

гасят друг друга, тем самым уменьшая синхронные колебания ротора. Авторами также отмечается, что в окрестности первого резонанса, когда фазовый угол «гуляет» вблизи 90° , возникает неустойчивое поведение с различными колебательными модами, и в общем ситуация не очень ясна.

Шэн, Цзян и Хун [Shang, 2011] в общем виде определили, что существуют более десяти различных состояний двухмассовой системы «гибкий ротор – упругозакреплённый статор» в зависимости от жесткости k_k их контактных поверхностей, коэффициента трения μ и скорости вращения ω по отношению к роторной критической $\omega_0 = \sqrt{k_r/m_r}$. Рис. 15 иллюстрирует при относительно большой (слева) и малой величине k_k следующее:

- кривая DF_i обозначает границу области существования i -й формы обкатки без (dry whirl) или с присутствием проскальзывания и частотой, соответствующей одной из отрицательных нелинейных частот для нелинейных нормальных мод связанной системы «ротор-статор»;

- кривая DW – это граница, на которой перестает существовать либо обкатка со второй (более высокой) частотой обратной прецессии и с проскальзыванием (dry whip), либо виброударное движение (partial rub), вызванное дисбалансом;

- прямые Ω_L и Ω_U – это пределы для синхронного бесконтактного движения (no-rub);

- кривые HP и SN представляют, соответственно, границы бифуркации Хопфа и седлоузловой бифуркации решений для синхронного безотрывного скольжения (synchronous full annular rub).

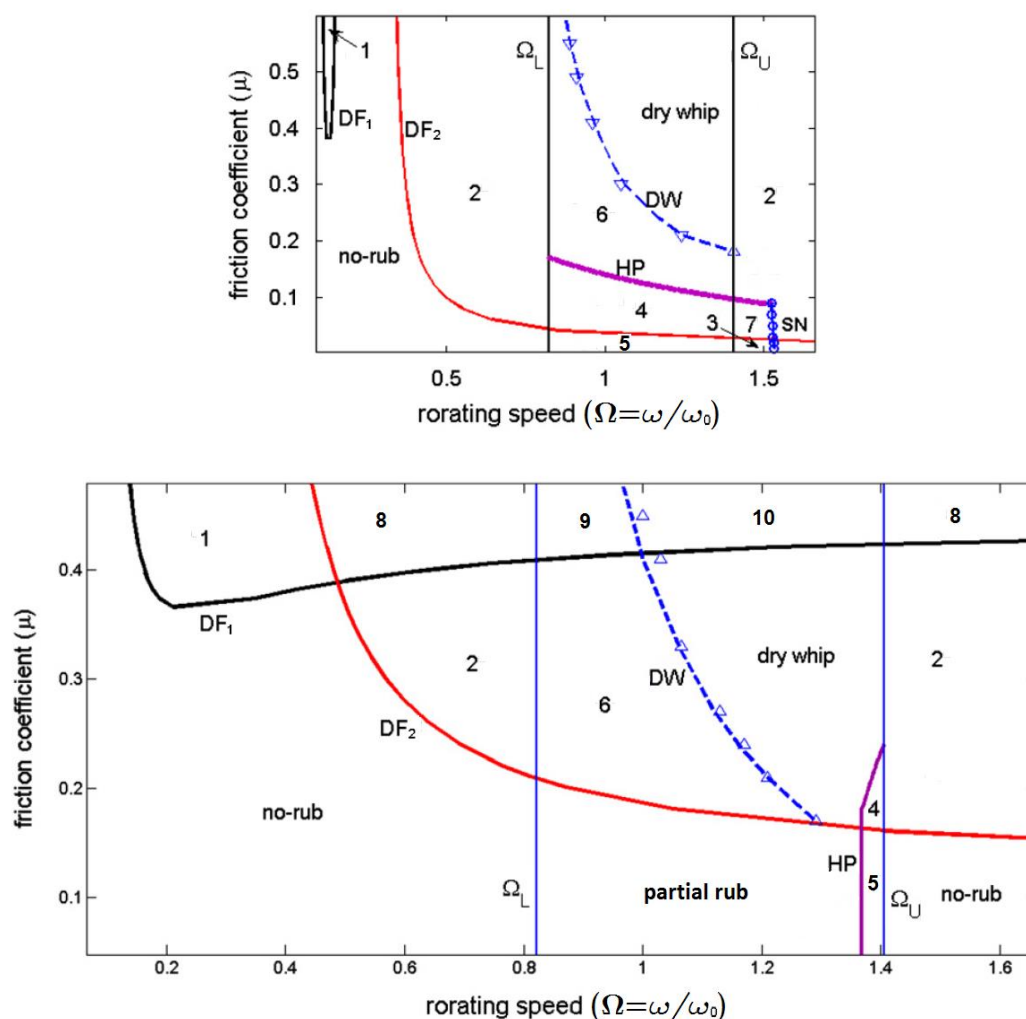


Рис. 15. Возможные динамические поведения двухмассовой системы «ротор – упругоукреплённый статор»:

- “no-rub” - область существования бесконтактного движения,
- “dry whip” - область существования обкатки с проскальзыванием и со 2-й частотой обратной прецессии,
- “partial rub” - область существования виброударного движения,
- “1” - область сосуществования бесконтактного движения и 1-й формы обкатки, “2” - область сосуществования бесконтактного движения и 2-й формы обкатки, “3” - область сосуществования бесконтактного движения и синхронного скольжения, “4” - область сосуществования синхронного скольжения и 2-й формы обкатки, “5” - область существования синхронного скольжения, “6” - область сосуществования виброударного движения и 2-й формы обкатки, “7” - область сосуществования бесконтактного движения и синхронного скольжения и 2-й формы обкатки, “8” - область сосуществования бесконтактного движения и 1-й и 2-й форм обкатки, “9” - область сосуществования виброударного движения и 1-й и 2-й форм обкатки, “10” - область сосуществования 1-й и 2-й форм обкатки

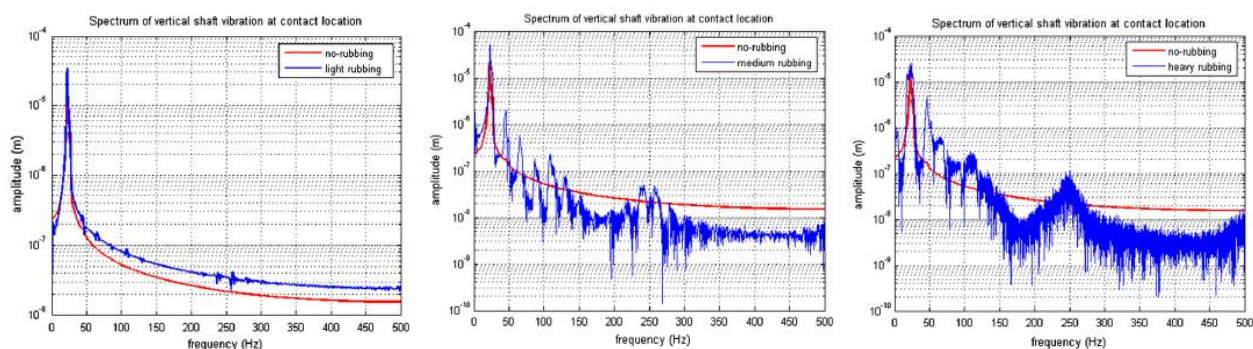
Отдельного внимания заслуживают статьи Костюка и его партнеров-ученых. Так, в [Костюк, 2011] по-видимому, впервые среди соотечественников-исследователей явления обкатки, провозглашается необходимость перехода от одномассовой модели к более сложной схематизации неуравновешенного гибкого ротора на опорах при его контактном взаимодействии со статором. Это обоснуется тем, что параметры обкатывания зависят: 1) от жёсткостей и демпфирований подшипников, которые в свою очередь могут быть зависимыми от скорости вращения и различными в горизонтальном и вертикальном направлениях; 2) от жесткости и демпфирования статора, в т.ч. от перемещения статора на собственных упруго-демпферных опорах; 3) от расположения дисбаланса, места контакта и пучности колебаний на длине ротора (если дисбаланс приходится на узел некоторой формы колебаний, то вынужденные перемещения ротора по этой форме не возникают, и наоборот, если дисбаланс рядом с пучностью некоторой формы колебаний, то по этой форме возникают роторные перемещения, особенно интенсивные при околорезонансных оборотах), т.е. от динамических характеристик системы «ротор-опоры-статор». Уравнения движения системы решены ими в конечно-элементной формулировке с прибавлением к матрице жесткости ротора при каждом его одноточечном задевании за статор матрицы жесткости статора в месте контакта, причем коэффициенты последней определяются при интегрировании пошагово: $k_{11}=k_{22}=K_{\text{ст}}(1-\delta/e)$ и $k_{12}=-k_{21}=-\mu K_{\text{ст}}(1-\delta/e)$, где $e>\delta$ - радиальное смещение ротора в контактном месте, δ и μ - радиальный зазор и коэффициент трения скольжения здесь же. Более того, в общем случае учитывается, что статорная жесткость $K_{\text{ст}}$ меняется в процессе контакта и зависит как от деформации, так и от направления скорости деформации статора, т.е. находится из характеристики «деформация-сила» в виде гистерезисной петли или из отношения сила/деформация. В результате: 1) рассчитаны траектории переходных перемещений оси ротора в различных его сечениях при ударах о статор и с установлением обкатывания первым

второго в относительных единицах (по отношению к зазору δ), по которым оценена опасность контакта в других точках по длине ротора; 2) выявлено, что повышая демпфирование в опорах ротора и в статоре, можно погасить явление обкатки. В последующих статьях [Костюк, 2012, Костюк, 2013] с помощью схематизации ротора в виде одномассовой модели численно и аналитически подтверждено положительное действие демпфирования, а также проанализировано развитие обкатки в случае уменьшения скорости вращения $\dot{\phi}$ за счет контактного трения. При решении в общем виде предполагается, что после первого же касания происходит «прилипание» неуравновешенного жесткого ротора на упругих опорах к жесткому статору и начинается обкатывание с быстро нарастающей и пульсирующей скоростью обратной прецессии до предельной средней величины, равной по модулю $\dot{\phi} r / \delta$ (r – радиус ротора в месте контакта). При этом размах A флуктуации скорости прецессии в начале обката соизмерим с отношением ε / δ – роторного эксцентриситета к зазору, т.е.: $A \approx \varepsilon / \delta$, а в момент достижения предельного обката со средней угловой скоростью $|\dot{\phi} r / \delta|$: $A < \varepsilon / \delta$.

Кию, предлагая не допускать захвата виброударных и безотрывных движений неуравновешенного ротора по магнитным подшипникам за счет обращения входящих в них страхующих втулок скольжения из пассивных в активные, не только описывает в общих чертах варианты управления последними, но и справедливо затрагивает проблему тепловыделения при контактном трении [Keogh, 2012]. Отправной точкой в его оценке по поступлению тепла в ротор и возникающему тепловому изгибу является предположение, что ещё до задевания за подпружиненные фрикционные опоры с зазором возникает эллиптическая не обязательно синхронная роторная прецессия. Полученная замкнутая система дифференциальных уравнений динамики в матричном виде сводится через преобразование Лапласа к матричной передаточной функции, по сингулярным значениям которой

определяются границы устойчивости. Таким образом, критерий устойчивости Кио или де-факто Найквиста включает комбинацию параметров, гарантирующих, что не произойдет нестабильный термический прогиб.

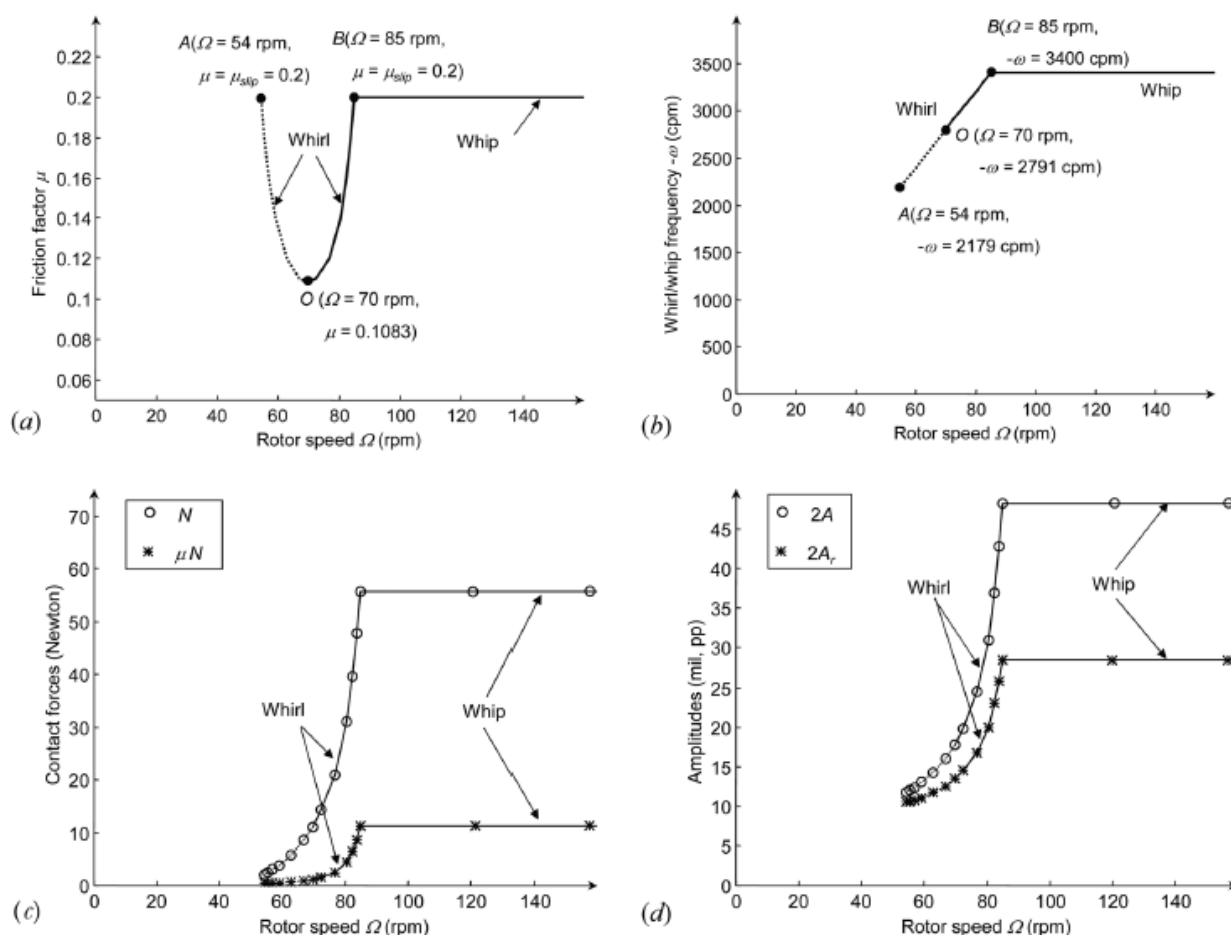
Экспериментально-теоретическая работа Торхани и др. [Torkhani, 2012] выделяется среди прочих сравнением траекторий и спектров колебаний реального гибкого ротора, взаимодействующего со статором, в зависимости от степени неуравновешенности от «легкой» до «тяжелой». При соответствующем легком контактном трении регистрируемая эллиптическая орбита выравнивалась практически до круговой из-за, по-видимому, непрерывного скольжения. В случае среднего взаимодействия с трением бесконтактная овалность сменялась искаженным эллипсом, большие полуоси которого примерно равные, а малые полуоси разной длины, вследствие двух ударов за оборот. В тяжелом случае наблюдалась почти треугольная траектория из-за трех контактов с отскоками за оборот. Соответствующие расчетные спектры вибраций переиллюстрированы ниже (рис. 16). Сопоставление этих результатов с характеристиками системы без трения показало, что спектральный состав системы с контактным трением складывается из роторной частоты и её супергармоник, которые относительно малы и наиболее проявляются при среднем уровне неуравновешенности, а также из частоты связанной системы «ротор-статор».



**Рис. 16. Спектры контактных колебаний теоретического ротора
при увеличении неуравновешенности**

Ю [Yu, 2012] вывел уравнение в форме полинома для частот обкатки, а также другие соотношения для направления силы контактного трения, амплитуд и относительных фаз радиусов сопряженных с обкаткой обратных прецессий без пренебрежения какими-либо важными параметрами двухмассовой системы «ротор-уплотнение» с местом их контакта вне роторного центра масс. Большинство своих выводов он сделал непосредственно из этих выражений без численных расчетов. Так, относительно начального решения O при $\mu = \mu_{\min}$ для каждого $\mu > \mu_{\min}$ существуют два решения A и B , удовлетворяющие положительности нормальной контактной силы, где $\mu_{\min} \approx 0.1$ - минимально необходимый коэффициент трения скольжения для реализации условия $N > 0$ и обкатки. Тогда по мере увеличения скорости вращения (рис. 17) и в связи с изменением (неопределенностью) коэффициента трения при нулевой скорости скольжения $\mu_{\text{no-slip}}$ в пределах $\mu_{\min} < \mu_{\text{no-slip}} < \mu$, обкатка может начаться из динамического состояния системы « A » в « O », а затем из « O » в « B ». Хотя обкатка из состояния « O » в « B » происходит с большей вероятностью, чем из состояния « A » в « O », последний случай нельзя исключать. В состоянии « B » начинается обкатка с проскальзыванием, потому что $\mu_{\text{no-slip}}$ достигает μ , причем силы N и μN , частота и амплитуда сопряженной обратной прецессии остаются постоянными при дальнейшем увеличении скорости вращения (рис. 17). Увеличение конструкционного демпфирования выше определенного имеет тот же эффект невозможности обкатки, что и уменьшение коэффициента μ ниже $\mu_{\min}$. Частота обкатки всегда выше собственной частоты ротора без трения об уплотнение и ниже нижней частоты связанных собственных колебаний системы «ротор-уплотнение». При этом частота обкатки без проскальзывания равна скорости вращения, умноженной на отношение радиуса ротора к зазору уплотнения, тогда как частота обкатки с проскальзыванием остается постоянной и, следовательно, ниже упомянутого отношения по мере увеличения скорости. Амплитуды колебаний и контактная сила трения пропорциональны зазору уплотнения. Причем амплитуда для центра масс

ротора (A), т.е. вне уплотнения или места контакта, больше той (A_r), которая реализуется в пределах последнего (рис. 17). Доказано, что сила трения всегда действует в направлении, противоположном скорости вращения ротора, при любых формах обкатки, даже при очень высоких оборотах.



**Рис. 17. Допустимые решения для обкатывания в зависимости
от скорости вращения ротора**

В современных авиадвигателях жесткость опор меньше жесткости ротора настолько, чтобы он при вращении оставался жестким и был закритическим одновременно. Это в свою очередь для того, чтобы расширить диапазон рабочих скоростей с низкой вибрацией. Отталкиваясь от таких реальных

предпосылок, Чжан с коллегами аналитически проанализировали в [Zhang, 2012] устойчивость синхронного скольжения несимметричного неуравновешенного жесткого ротора на кубически-нелинейных изотропных опорах по жесткому статору с линейно-упругой контактной поверхностью. Они, пользуясь методом усреднения и теорией устойчивости Ляпунова, построили уравнения и диаграммы бифуркаций для заданной вращающейся системы без и в случае трения, согласно которым с повышением скорости вращения до определенного предела, зависящего от демпфирования в опорных подшипниках, а также с увеличением эксцентриситета ротора диапазон устойчивого синхронного скольжения расширяется.

Лахрири с партнерами [Lahriri, 2012] экспериментально и теоретически испытали оригинальную конструкцию подшипника скольжения с четырьмя штифтами, чуть-чуть возвышающимися над его внутренней поверхностью для уменьшения контактного трения и центрирования взаимодействующего с ним неуравновешенного ротора. Сравнение поперечных колебаний реального и математического ротора внутри гладкого и предложенного подшипника с зазором показало, что во втором случае роторное прецессионное движение ограничивается «квадратом», т.к. ротор соударяется со штифтами. За счет этого скорость вращения при контакте не сильно замедляется, и самое главное, не возникает обкатывание. В дополнение [Lahriri, 2013] они выяснили, что нормальная контактная сила, рассчитанная по [Lankarani-Nikravesh, 1990], в действительности существенно больше измеренной, но, тем не менее, качественных отличий в колебательных откликах расчетной и экспериментальной систем не выявлено.

Альбэ с др. [Alber, 2013] полуаналитическим образом решили уравнения обратного безотрывного движения для многочастотной системы «ротор-статор» вида:

$$\begin{aligned} [M_R]\{\ddot{r}_R\} + [C_R]\{\dot{r}_R\} + [K_R]\{r_R\} &= [M_R]\{\varepsilon\}\omega^2 e^{i\omega t} - \{l_R\}F_C, \\ [M_S]\{\ddot{r}_S\} + [C_S]\{\dot{r}_S\} + [K_S]\{r_S\} &= \{l_S\}F_C \end{aligned},$$

где $\{l_R\}$ и $\{l_S\}$ - векторы, определяющие положение комплексной контактной силы $F_C = (1+i\mu)F_{CN}$, которые содержат единицы для координат контакта ротора и статора, а также нули в противном случае. Их аналитическая часть решения состоит в 4-х моментах. 1. В обобщении известного кинематического соотношения связи между одномодами ротором и статором

$$r_R - r_S = \delta e^{i\psi}, \text{ где } e^{i\psi} = \frac{F_{CN}}{|F_{CN}|} = \frac{1-i\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{F_C}{|F_C|}, \text{ до: } \{l_R\}^T \{r_R\} - \{l_S\}^T \{r_S\} = \delta \frac{1-i\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{F_C}{|F_C|}$$

2. В расширении подхода из [Ehehalt2006], где для описания обкатывания ротором Джеффкотта безынерционного статора учтена как превалирующая отрицательная асинхронная, так и небольшая синхронная частотная составляющая, до:

$$\{r_R\} = \{\hat{r}_{R\omega}\}e^{i\omega t} + \{\hat{r}_{R\Omega}\}e^{i\Omega t}, \quad \{r_S\} = \{\hat{r}_{S\omega}\}e^{i\omega t} + \{\hat{r}_{S\Omega}\}e^{i\Omega t}, \quad F_C = \hat{F}_{C\omega}e^{i\omega t} + \hat{F}_{C\Omega}e^{i\Omega t}.$$

3. В разделении частотных составляющих, что даёт две системы уравнений для синхронной (ω) и асинхронной (Ω) частот:

$$\begin{aligned} (-\omega^2[M_R] + i\omega[C_R] + [K_R])\{\hat{r}_{R\omega}\} &= \omega^2[M_R]\{\varepsilon\} - \{l_R\}\hat{F}_{C\omega} \\ (-\omega^2[M_S] + i\omega[C_S] + [K_S])\{\hat{r}_{S\omega}\} &= \{l_S\}\hat{F}_{C\omega}, \\ \{l_R\}^T \{\hat{r}_{R\omega}\} - \{l_S\}^T \{\hat{r}_{S\omega}\} &= \delta \frac{1-i\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\hat{F}_{C\omega}}{|F_C|} \\ (-\Omega^2[M_R] + i\Omega[C_R] + [K_R])\{\hat{r}_{R\Omega}\} &= -\{l_R\}\hat{F}_{C\Omega} \\ (-\Omega^2[M_S] + i\Omega[C_S] + [K_S])\{\hat{r}_{S\Omega}\} &= \{l_S\}\hat{F}_{C\Omega}, \\ \{l_R\}^T \{\hat{r}_{R\Omega}\} - \{l_S\}^T \{\hat{r}_{S\Omega}\} &= \delta \frac{1-i\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\hat{F}_{C\Omega}}{|F_C|} \end{aligned}$$

4. В замене $|F_C| = |F_{C\omega} + F_{C\Omega}| \approx |F_{C\Omega}|$. В результате они получают два решения:

$$|F_{C\Omega}| = \delta \frac{1 - i\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{1}{-\{l_R\}^T (-\Omega^2 [M_R] + i\Omega [C_R] + [K_R])^{-1} \{l_R\} - \{l_S\}^T (-\Omega^2 [M_S] + i\Omega [C_S] + [K_S])^{-1} \{l_S\}},$$

$$\hat{F}_{C\omega} = \frac{\{l_R\}^T (-\omega^2 [M_R] + i\omega [C_R] + [K_R])^{-1} \omega^2 [M_R] \{\varepsilon\}}{\delta \frac{1 - i\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} + \{l_R\}^T (-\omega^2 [M_R] + i\omega [C_R] + [K_R])^{-1} \{l_R\} + \{l_S\}^T (-\omega^2 [M_S] + i\omega [C_S] + [K_S])^{-1} \{l_S\}}$$

Так как $|F_{C\Omega}| = \text{Re}$, мнимая часть правой стороны первого из решений должна быть равной 0. Из этого дополнительного соотношения авторы численно и графически вычисляют неизвестные отрицательные действительные значения Ω с учетом ещё пары условий $|F_{C\Omega}| > 0$ и $|r_{RC\Omega}| > \delta$ - роторное смещение в месте контакта, превышающее зазор. Вместе с тем по значениям $\Omega = \text{Re}$ оценен эффект от величины δ , а также от коэффициентов демпфирования в системе, т.е. матриц $[C_R]$ и $[C_S]$:

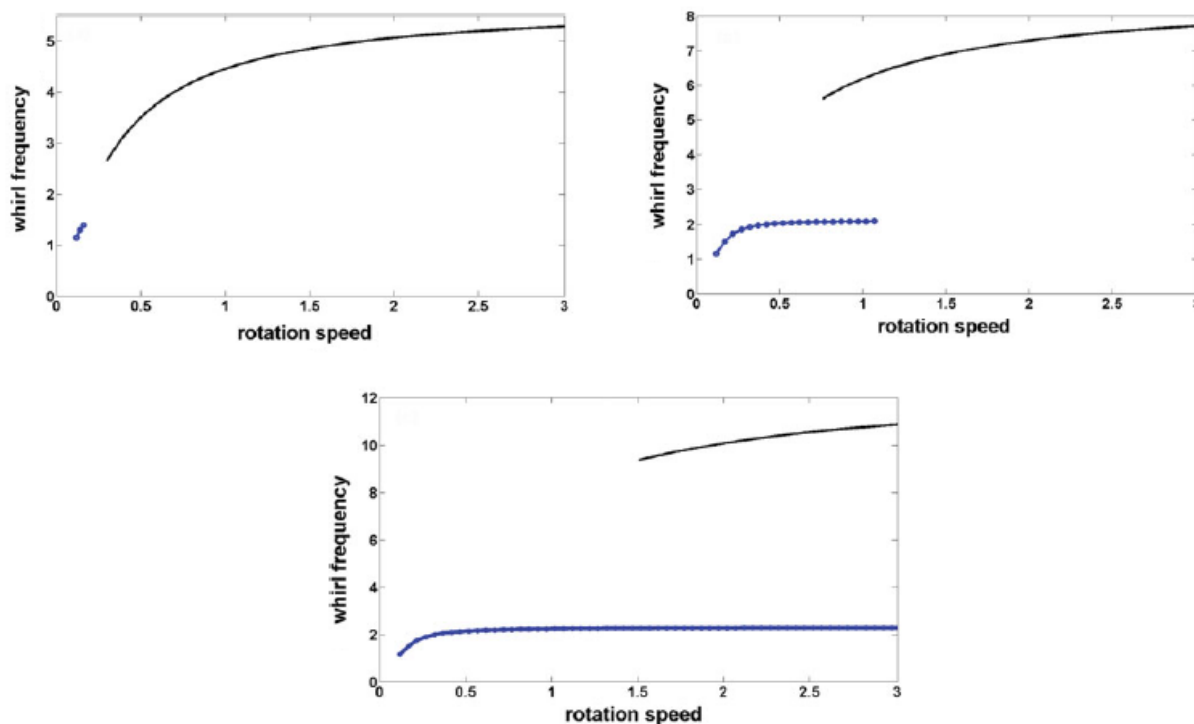
$$[C_X] = [M_X] \left(\sum_{i=1}^n 2 \frac{d_{Xi} \lambda_{Xi}}{m_{Xi}} q_{Xi} q_{Xi}^T \right) [M_X], \text{ где } d_{Xi}, m_{Xi}, \lambda_{Xi} \text{ и } q_{Xi} - i\text{-е модальное}$$

демпфирование, i -я модальная масса, собственная частота и форма ротора или статора. Оказалось, что зазор не влияет на возможные формы обкатки, и существуют пороговые коэффициенты демпфирования, при которых та или иная форма обкатки исчезает. Так, пороговое модальное демпфирование ротора, при котором исчезает 1я форма обкатки с частотой $\Omega \approx -\lambda_{RS1}$ больше того, при котором пропадает 2я – с $\Omega \approx -\lambda_{RS2}$, где λ_{RSi} - i -я собственная частота беззазорной системы «ротор-статор». В частности, поэтому для системы с ненулевым зазором, в которой собственные частоты статора выше собственных частот ротора, обкатывание с высокой частотой установить труднее, чем безотрывное обратное движение с низкой частотой.

Прямое (синхронное), а также обратное полное кольцевое трение между ротором Джеффкотта и подвижным статором аналитически проанализировали Чен, Яо и Цзян [Chen, 2013]. Для этих движений они получили в форме:

$$r_r = A_{fr} e^{i\omega t} + A_{br} e^{(\alpha - i\Omega)t}, \quad r_s = A_{fs} e^{i\omega t} + A_{bs} e^{(\alpha - i\Omega)t + i\phi},$$

где A_{fr} и A_{fs} – постоянные амплитуды синхронных (прямых) прецессий ротора и статора, A_{br} и A_{bs} – нарастающие во времени амплитуды их обратных прецессий, решения в общем виде и плоские графики-карты устойчивости в зависимости от скорости вращения, указывающие на следующее. Имеются две области существования как синхронного скольжения, так и обкатывания. Однако устойчивые решения для синхронного скольжения находятся, как правило, внутри первой низкочастотной области. При этом, чем больше отношение жесткости опор статора к поперечной жесткости ротора k_r и меньше отношение массы статора к массе ротора m_s/m_r , тем шире первая область существования-устойчивости за счет сужения второй. Две области частот существования обкатывания обычно отделены друг от друга. При этом первая U-образная область очень узкая, настолько, что её может быть трудным отследить в реальных роторных системах. Однако при уменьшении отношений m_s/m_r и контактной жесткости к k_r первая область существования расширяется и может перекрываться со второй или даже полностью содержать в себе вторую. В случае перекрытия областей на каждой частоте вращения из определенного диапазона, границы которого задаются коэффициентом трения, возможны две устойчивые обратные прецессии с двумя разными частотами (рис. 18).



**Рис. 18. Возможные частоты обратной прецессии
при неперекрывающихся (слева) и перекрывающихся (справа)
диапазонах существования обкатки**

Пелетан с коллегами [Peletan, 2014] адаптировали классический метод гармонического баланса для вычисления квазипериодических решений, свойственных системе «ротор-статор», таких как “partial rub” и “backward whip”. В первом случае ротор периодически контактирует со статором, что искажает гармоническую форму роторных перемещений, во втором – ротор катится с проскальзыванием по статору, и частота прецессии не пропорциональна скорости вращения, отсюда они отталкиваются от двух основных несоизмеримых частот и их гармоник. При этом одна частота предполагается известной и равной оборотной, а другая – неизвестной и зависимой от первой через функцию, которая автоматически прогнозируется (численно подбирается) на основе алгоритма продолжения длины псевдодуги [Sundararajan, 1998]. В заключение показано, что предложенный подход

примерно в 7 раз быстрее, чем интегрирование Рунге-Кутты, без потери точности.

Импульсный способ подавления неполного кругового трения ротора о статор, как при прямой, так и при обратной прецессии вплоть до перехода к бесконтактному движению представлен Ксю и его соавторами [Xu, 2014]. Ими теоретически на модели неуравновешенного ротора Джеффкотта, описанного в полярной системе координат и задевающего локально упругий статор, показано, что если разность фаз $\phi = \omega\tau - \psi - \theta$, где $\tau = \omega_0 t$, ω_0 – собственная частота ротора, ψ – угол прецессии центра ротора, θ – угол между линейной скоростью перемещения роторного центра и её составляющей по нормали (в радиальном направлении), не удовлетворяет двойному неравенству $-\pi/2 < \phi < \pi/2$, то энергия вибрации может быть понижена. На этом основании ими численно опробована стратегия управления импульсами, которые, когда происходит контакт между ротором и статором, подаются в радиальном и/или тангенциальном направлении с целью увода ϕ в промежуток $\pi/2 < \phi < \pi$. Практическая осуществимость их способа возможна благодаря тому, что импульсы подаются несколько раз в x -направлении и $-x$ -направлении, т.е. каждый импульс разлагается на горизонтальное и вертикальное направления.

Аналитическое описание возникающего безотрывного движения ротора при отказе магнитных опор и его падении на вспомогательные радиально-упорные шарикоподшипники дано Уилксом и др. [Wilkes, 2014]. В отличие от системы «ротор-втулки» [Maslen, 1996] в данном случае трение качения (за счет шариков) на продольных контактных поверхностях будет намного меньше трения скольжения на одном из торцов ротора о внутреннюю обойму вспомогательного шарикоподшипника. Торцевое контактное трение вызывает поперечную силу, толкающую ротор в прямом прецессионном направлении, т.е. в сторону вращения. Эта прямая касательная сила пропорциональна

продольной нагрузке на ротор и коэффициенту трения между торцевыми поверхностями одного из вспомогательных подшипников и соответствующей роторной шейки. Как результат, эта сила приводит к синхронному скольжению, когда скорость вращения (ω) ниже собственной частоты соединенной системы «ротор-статор» ($\tilde{\lambda}$), и когда $\omega > \tilde{\lambda}$ к прямому асинхронному или «заторможенному»* скольжению с постоянной частотой, близкой к $\tilde{\lambda}$. Численное моделирование также показало, что первая частота $\tilde{\lambda}$ подобного скольжения может быть пройдена, после чего система входит во вторую полосу синхронного скольжения, и что далее при некоторой более высокой собственной частоте соединенной системы «ротор-статор» она способна снова зафиксироваться уже на второй частоте прямого «заторможенного» скольжения.

Альбэ [Alber, 2015] применил метод модальной развязки или редукции к собственной многочастотной экспериментальной контактной системе и показал, что входящие в неё ротор и статор в ограниченном диапазоне скоростей вращения могут быть описаны двумя простыми подсистемами с одной степенью свободы каждая. В частности, он выполнил преобразование к модальным координатам несвязанных ротора $\{p_r\}$ и статора $\{p_s\}$:

$$\{r_r\} = [Q_r]\{p_r\}, \{r_s\} = [Q_s]\{p_s\}, \text{ где } [Q_r] \text{ и } [Q_s] - \text{модальные матрицы};$$

затем учел только n -ю моду ротора и m -моду статора, нормируя координаты контакта для этих мод, полагая их единицами, и пренебрегая всеми остальными формами колебаний, получил редуцированные уравнения безотрывного движения с модальными параметрами ротора и статора соответствующего порядка (n и m). В результате, на выбеге экспериментального ротора между его двумя низшими резонансными

*Ввиду того, что угловая скорость скольжения меньше скорости собственного вращения ротора.

частотами зафиксированы обратная прецессия и в дополнение к оборотной отрицательная частотная составляющая, абсолютное значение которой оказалось выше первой роторной частоты и ниже первой системной, рассчитанной без учета зазора. Другие формы обкатки им не зарегистрированы. Сравнивая АЧХ, опытную и расчетные для исходной и редуцированной системы, он продемонстрировал, что доминируют первые моды ротора и статора. Остальные формы колебаний вносят небольшой вклад в общее безотрывное движение системы.

Уилкс с Эллисоном [Wilkes, 2015] развили и экспериментально проверили аналитическую модель Кумара-Чайлдса (рис. 14) относительно двухточечного контакта жесткого ротора с жестким статором, допуская произвольную фазу между расположениями контактов. Полагая этот относительный угол контактов действительным, построены соответствующие карты устойчивости обкатывания с обратной прецессией, варьирующейся от цилиндрической до конической. Данные карты подтверждают, что при первой форме обкатки, близкой к чисто поступательному движению роторной оси, относительный контактный угол стремится к нулю, а при второй – близкой к чисто угловым колебаниям роторной оси – к 180° . В экспериментах получено, что в случае обычного ротора с центром масс между опор с зазорами были возбуждены только цилиндрические прецессионные моды, а в случае консольного ротора возбуждались, как цилиндрические, так и конические. В дополнение наблюдалось движение, при котором менее нагруженная сторона консольного ротора безотрывно катилась по статору, а более нагруженная – демонстрировала в то же время прерывистый контакт. Также по результатам измерений отмечено – разное отношение роторного радиуса к зазору приводит к тому, что один из контактов тянет другой, и это может быть причиной

изменения фазового угла между двумя контактами по сравнению с аналитическим решением.

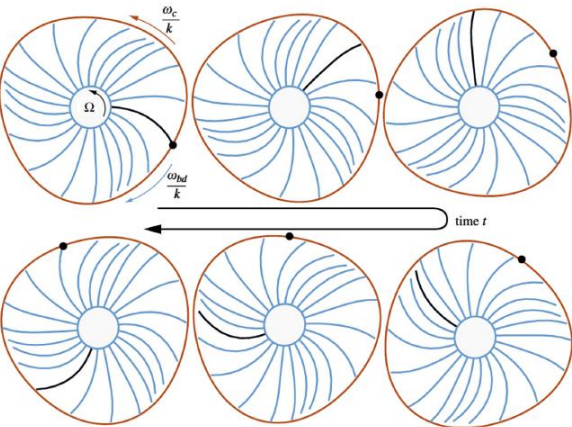
Ма и его соавторы [Ма, 2016] провели глубокий аналитический обзор работ, посвященных моделированию контакта с трением между роторными лопатками и статором-кожухом, который может быть как жестким, так и податливой оболочкой без и с учетом износа и покрытия. Помимо полученных предшественниками значимых результатов (табл. 1) в их обзоре отмечается, что контакт лопатки и кожуха – более сложный процесс: 1) здесь сила нормального давления в основном зависит от деформации тел(а) в целом, а не от местной деформации; 2) происходит изгиб-кручение тела (лопатки); 3) первый контакт (удар) не является кратковременным из-за формы, расположения и движения лопатки. Принимая во внимание эффекты деформации упругого кожуха и лопатки как консольной балки с переменным поперечным сечением, построена собственная модель контактной силы между ними [Ма, 2015]. Верификация натурными экспериментами показала, что смоделированная при квазистатическом предположении сила меньше, чем реальная динамическая. Ввиду этого несовпадения и выполненного позднее обзора указаны в [Ма, 2016] рекомендации для будущих исследований: 1) необходимы расчетные модели с учетом кинетических энергий лопатки и кожуха, параметров пластичности и прочности, центробежного ужесточения и падения изгибной жесткости существенно деформирующейся от вращения лопатки, а также с силой Кориолиса из-за динамической связи осевых и изгибных колебаний лопатки; 2) важна оценка совместного действия трех нелинейных нагрузок: от трения скольжения, тепловой и аэродинамической; 3) требуются экспериментальные измерения модальных коэффициентов демпфирования и сил трения скольжения для лопатки-кожуха.

Таблица 1

**Краткие сведения по моделированию системы «роторные лопатки –
статорная оболочка» из большой обзорной статьи [Ma, 2016]**

Источники цитирований	Результаты
Almeida P., Gibert C., Thouverez F., et al.: Numerical analysis of bladed disk–casing contact with friction and wear. In: ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition, American Society of Mechanical Engineers (2015).	Контактное трение может вызвать неустойчивость системы, когда полоса чуть ниже и выше частоты возбуждения совпадает с модой одноузлового диаметра лопаточного диска. Износ может привести к снижению вибрации, когда истираемый материал удаляется во время процесса износа. Интенсивность износа покрытия связана с соотношением между частотой колебаний лопаток и скоростью вращения.
Almeida P., Gibert C., Thouverez F., et al. Experimental analysis of dynamic interaction between a centrifugal compressor and its casing. J. Turbomach. 137 , 031008.1-10 (2015).	Усиление вибрации может наблюдаться, когда гармоники частоты вращения совпадают с модами кожуха или лопаточного колеса. Интенсивность износа связана с отношением частоты возбужденной моды к скорости вращения.
Arzina D. Vibration analysis of compressor blade tip rubbing. Master's thesis, School of Engineering, Cranfield University, Cranfield (2011).	Крутильные колебания могут наблюдаться в радиальном направлении между передней и задней кромками лопатки. Нелинейная вибрация может приводить к резонансной характеристике лопатки на некритических частотах.
Cao D.Q., Yang Y., Chen H.T., et al. A novel contact force model for the impact analysis of structures with coating and its experimental verification. Mech. Syst. Signal Process. 70-71, 1056-1072 (2016).	Оригинальная модель гистерезисной контактной силы с контактной жесткостью, состоящей из двух компонент – из жесткости лопаток и кожуха и локальной контактной жесткости мягкого или твердого покрытия, а также с нелинейным гистерезисным демпфированием от потерь при трении.

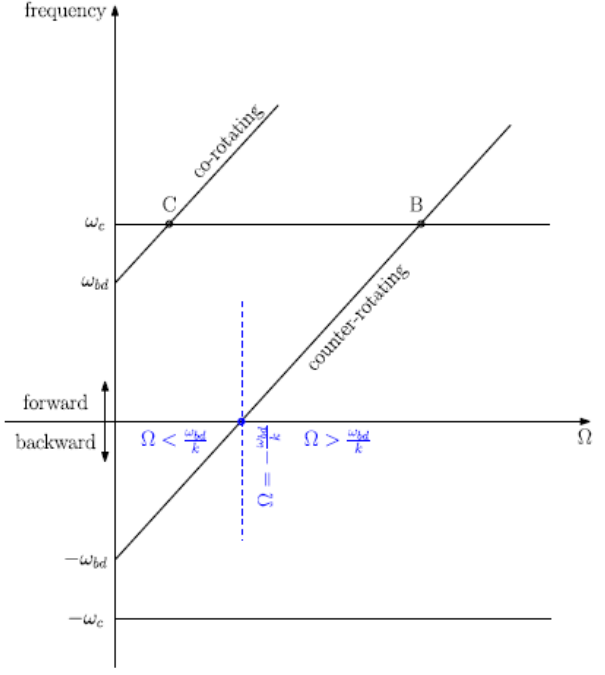
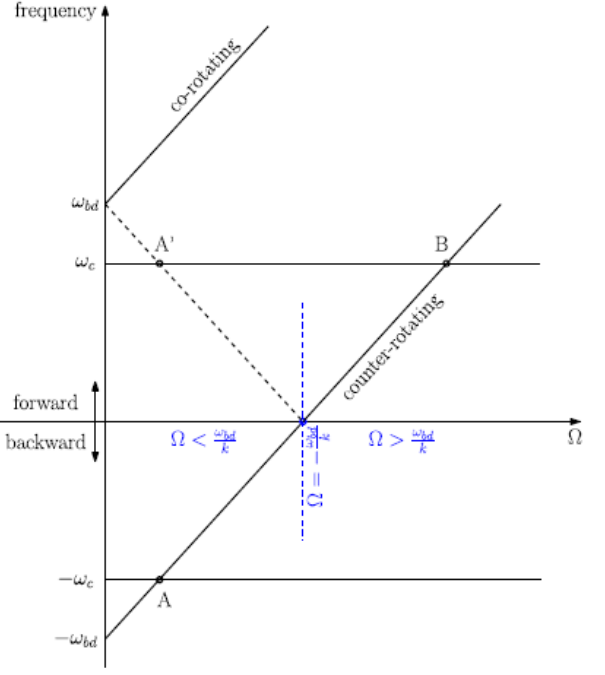
Продолжение Таблицы 1

Chen G. Characteristics analysis of blade-casing rubbing based on casing vibration acceleration. J. Mech. Sci. Technol. 29(4), 1513-1526 (2015).	Колебания кожуха во время контакта сопряжены с колебаниями лопатки, поэтому возможно определить коэффициент и особенности трения с помощью вибрации кожуха. По частоте прохождения лопаток можно выявить «многолопаточное трение». Частота вращения и её кратные высокочастотные компоненты могут наблюдаться в спектре многоступенчатой роторной системы.
Garza J.W. Tip rub induced blade vibrations: experimental and computational results. Master's thesis, The Ohio State University, USA (2006).	В начале лопатка трется о кожух примерно на 75%-ной хорде; радиальная нагрузка на кончике лопатки уменьшается с ростом трения; напряжение на кончике лопатки колеблется, что свидетельствует о модальном типе вибрации или дребезжания во время трения.
Legrand M., Pierre C., Cartraud P., Lombard J.-P. Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk–casing modal interaction. J. Sound Vib. 319, 366-391 (2009).  Рис. 19. Иллюстрация явления модального взаимодействия для кожуха с тремя диаметрами [Legrand, 2009]	Исследовано модальное взаимодействие, при котором колебания лопаток и кожуха сопровождаются обменом энергии. В общем, это 3 опасные ситуации для осесимметричной конструкции в результате совпадения скорости бегущей волны в кожухе (т.е. в частности прямой моды кожуха ω_c/k с тремя на рис. 19 диаметрами, где черная точка показывает положение одного из узловых диаметров), со скоростью встречной моды лопаточного колеса (на рис. 19 $\Omega - \omega_{bd}/k$, причем соответствующая волна в неподвижной системе отсчета является прямой, колесо и лопатки вращаются со скоростью Ω, направление вращения показано движением черной лопатки,

Продолжение Таблицы 1

Legrand M., Pierre C., Peseux B. Structural modal interaction of a four degree of freedom bladed disk and casing model. J. Comput. Nonlinear Dyn. 5, 13-41 (2010).	ω_{bd} и ω_c – это собственные частоты k-узловых моделей лопаточного диска и корпуса, k – одно и то же число узловых диаметров, т.к. обмен энергией возможен только в случае двух форм колебаний с одинаковым количеством диаметров). Наряду с опасным «В»-случаем (рис.20): $\Omega=(\omega_c+\omega_{bd})/k$, проанализированным для прерывистого контакта лопатки или лопаток с кожухом (когда один контакт исчезает и следует другой контакт той же или иной лопатки), два других критических состояния системы «лопаточное колесо - кожух» «А»: $\Omega=(\omega_{bd}-\omega_c)/k$ и «С»: $\Omega=(\omega_c-\omega_{bd})/k$ Леграном и его коллегами проигнорированы, т.к. они возможны при низких (далеких от рабочих) скоростях вращения, на которых центробежные и динамические эффекты слишком слабы, чтобы вызвать контакт.
[1] Legrand M., Barailly A., Pierre C. Numerical investigation of abradable coating removal in aircraft engines through plastic constitutive law. J. Comput. Nonlinear Dyn. 7, 011010.1-11 (2012) [2] Legrand M., Batilly A., Magnain B., et al. Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines. J. Sound Vib. 331, 2578-2601 (2012). [3] Batailly A., Legrand M., Millecamps A., et al. Redesign of a high-pressure compressor blade accounting for nonlinear structural interactions. J. Eng. Gas Turbines Power. 137, 022502.1-8 (2015)	Здесь следует отметить ещё четвертый случай, когда статор механически нечувствителен к взаимодействию и ведет себя как локально деформируемая и жесткая в целом конструкция. Тогда (когда $\omega_c=0$) модальное взаимодействие происходит при синхронизации скорости ротора с собственной частотой лопаток $\Omega=\omega_{bd}/k$. Такая ситуация, воспроизведенная численным моделированием в [1], возможна на малых оборотах авиадвигателя, и конструкция лопаток способна с запасом выдерживать её. Причем критические скорости вращения действительно связаны с собственными лопаточными частотами, а критические напряжения располагаются на краях лопатки, в основном у её основания [2]. На основе

Продолжение Таблицы 1

	кусочно-линейного закона пластичности разработана модель трения между лопаткой и кожухом с учетом эффекта удаления материала [1], [3]. При учете износа покрытия используются три параметра: модуль Юнга, модуль пластичности и предел текучести, а также профиль износа покрытия в реальном времени. Уровень вибрации лопатки влияет на механические характеристики истираемого покрытия, в свою очередь, покрытие может вызвать более сильную вибрацию лопатки.
	
Рис. 20. Диаграммы Кэмпбелла с возможными модальными взаимодействиями «А», «В» и «С» между лопатками вращающегося колеса и кожухом (в неподвижной системе отсчета)	
Lesaffre N., Sinou J.J., Thouverez F. Contact analysis of a flexible bladed-rotor. Eur. J. Mech. A-Solid. 26, 541-557 (2007).	Неустойчивая динамика системы «лопатки-кожух» около критической частоты кожуха может наблюдаться даже в условиях скольжения без трения.
Lesaffre N., Sinou J.J., Thouverez F. Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. J. Sound Vib. 299, 1005-1032 (2007).	В трущейся системе «лопатки-кожух» возможны не только область, но и полосы неустойчивости и посткритические связанные моды.

АНАЛИТИКА СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМЕ НЕПРЕРЫВНОГО КОНТАКТА РОТОРА СО СТАТОРОМ

Продолжение Таблицы 1

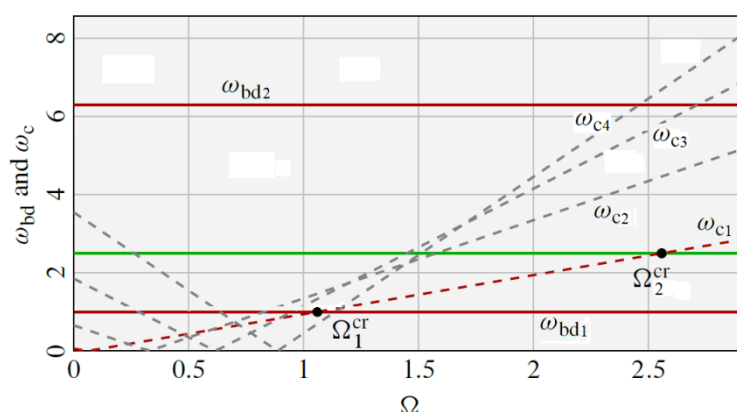
Ma H., Tai X., Han Q., et al. A revised model for rubbing between rotating blade and elastic casing. J. Sound Vib. 337, 301-320 (2015).	В условиях жесткого кожуха окружная нагрузка значительно увеличивается с увеличением глубины вдавливания; однако максимальная осевая нагрузка увеличивается намного меньше, что свидетельствует о нелинейной характеристике контакта. При небольшой жесткости кожуха нормальное контактное усилие имеет линейную характеристику с глубиной вдавливания.
Petrov E. Multiharmonic analysis of nonlinear whole engine dynamics with bladed disc-casing rubbing contacts. In: ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition, American Society of Mechanical Engineers (2012).	На основе оригинальной контактной модели с несколькими различными смещениями и нелинейными пружинами на конце лопатки по всей её ширине показано, что нечетные гармоники возбуждаются при трении лопатки о корпус.
Peyraut F., Seichepine J.L., Coddet C., et al. Finite element modeling of abradable materials-identification of plastic parameters and issues on minimum hardness against coating's thickness. Int. J. Simul. Multidiscip. Des. Optim. 2, 209-215 (2008).	Билинейный пластический закон может точно моделировать механическое поведение материала покрытия при контакте лопатки с кожухом.
Reiss H. Flow Control Core, Overview European Workshop on New Aero Engine Concepts, Munich, 30 June – 1 July (2010).	С помощью инфракрасной камеры измерено тепловыделение, вызванное трением между лопаткой и покрытием. Истирание (интенсивность износа) покрытия соответствует отношению частоты отклика системы к частоте скорости.
Salvat N., Batailly A., Legrand M. Modeling of abradable coating removal in aircraft engines through delay differential equations. J. Eng. Gas Turbines Power 135, 102102 (2013).	Когда лопатка задевает покрытие кожуха, часть покрытия удаляется после каждого задевания по аналогии с механической обработкой металла.
Sinha S.K. Dynamic characteristics of a flexible bladed rotor with Coulomb damping due to tip-rub. J. Sound Vib.	Местное трение на кончике лопатки при сильном давлении на кожух носит нелинейный характер, потому что

Продолжение Таблицы 1

273, 875-919 (2004).	нормальная контактная сила между ними подобна силе Герца.
----------------------	---

К сведениям из табл. 1 также уместно добавить следующие результаты Сальвата, Батайи и Леграна [Salvat, 2016]. В дополнение к своим предыдущим исследованиям в этой работе они учли гибкость вала; а именно для турбовентиляторного реактивного двигателя построили двумерную контактную модель системы «гибкий ротор – гибкие лопатки – упругий корпус» из нескольких балок Бернулли-Эйлера, в т.ч. с десятью балочными элементами на лопатку и набором из сорока криволинейных балок для корпуса. При этом рассмотрены два механизма возникновения контакта за счет 1) начальной деформации корпуса от фиксированной нагрузки на него и 2) дисбаланса диска с лопатками (вентилятора), а также матрица жесткости связи в начале с периодическими во времени, а затем с преобразованными коэффициентами путем смены системы отсчета для проведения линейного модального анализа, в т.ч. на устойчивость нулевого решения с отслеживанием его действительных и мнимых корней. В результате такого подхода выявлены два неустойчивых диапазона, один из которых обусловлен предсказанными критическими скоростями при совпадении мод: $\Omega_{cr}=(\omega_{ck}+\omega_{bdk})/k$, где ω_{ck} и ω_{bdk} – собственные частоты корпуса и лопаточного диска с соответствующим узловым диаметром k . Так, при контактно-модальном взаимодействии, возникающем из-за искривления корпуса, которое становится больше, чем у диска, а также причиной выборки зазора между лопатками/корпусом и прямой прецессии (ротора в целом), первая мода системы лопаток с одним узловым диаметром (диска) приводит к его первой критической/неустойчивой полосе (рис. 21) с экспоненциально нарастающими по амплитуде колебаниями и является доминирующей в сопутствующем общем связанном движении ротора. С другой

стороны, вследствие гибкости вала (ротора) происходит существенный сдвиг вверх собственных частот с $k=1$ и соответствующих критических скоростей. Первая неустойчивость (например, представленная кружком на рис. 22) характеризуется бегущей назад волной на лопаточном диске и распространяющейся вперед волной на корпусе, деформируемые формы которых иллюстрирует рис. 23. Диаграмма устойчивости (рис. 22) показывает, что жесткостные изменения либо на лопаточном диске, либо на корпусе могут вывести Ω_1^{cr} из рабочего диапазона во избежание неустойчивости. Дисбаланс в основном возбуждает моды гибкого вала, оставшаяся часть энергии деформации локализуется на моде лопаточного диска с одноузловым диаметром, а все остальные моды имеют незначительный вклад в общую контактную динамику. Однако в отличие от экспоненциального роста прямой прецессии в случае модального сопряжения, синхронная вибрация от неуравновешенности сдерживается (ограничивается) корпусом, как некоторый предельный цикл. При этом несколько лопаток остаются в постоянном контакте, две лопатки демонстрируют прерывистый контакт, а остальные колеблются свободно.



**Рис. 21. Нормированная диаграмма Кэмпбелла по наименьшей
собственной частоте лопаточного диска**

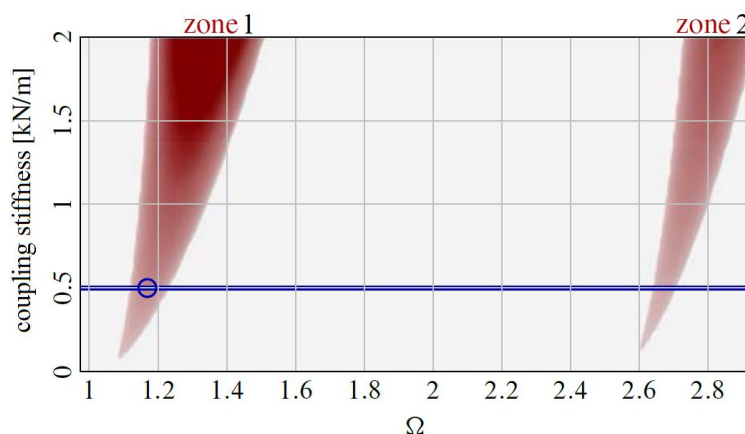


Рис. 22. Зоны неустойчивости, вследствие сопряжения мод корпуса и лопаточного диска с одноузловым диаметром (1) и гибкости вала (2), увеличивающиеся с жесткостью фиктивной контактной связи

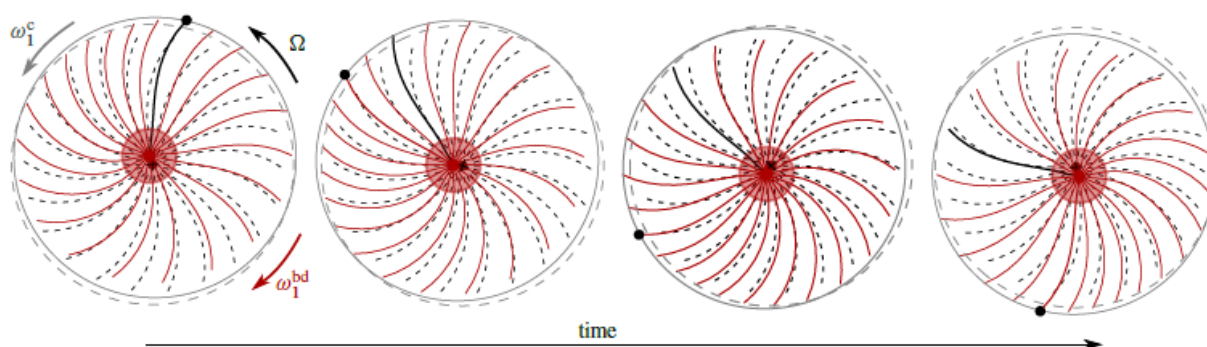


Рис. 23. Деформированная форма с одноузловым диаметром во времени

Оценка контактной жесткости – непростая задача и в этой сложности принципиальный недостаток типичной модели гладкого линейно-упругого контакта*, в которой ротор переключается между неконтактным и контактным поведением после превышения зазора со статором. Для того чтобы показать, как шероховатость поверхности влияет на жесткость контакта и на движение

*В настоящее время учитываются различные «нюансы», но основные исходные положения типичной контактной модели сохраняются [Никифоров, 2021].

**В действительности деформация всегда существующих неровностей обычно представляет собой некоторую комбинацию упругого и пластического эффектов.

ротора по статору, Варни и Грин [Varney, 2016] свели качественно иную упругопластическую модель контакта Джексона-Грина к простой нелинейной (экспоненциальной) контактной силе в зависимости (через коэффициенты) от роторного прогиба, свойств материала(ов) и неровностей поверхностей (ротора и статора). В отличие от типичной модели, когда контактная сила развивается только после того, как отклонение ротора превышает заданный зазор, и дальше линейно зависит от контактной жесткости, сила Варни-Грина предсказывает постепенное увеличение контактного усилия с момента сближения ротора и статора на размер шероховатости их поверхностей. Таким образом, предложенный механизм контакта, фактически заключающийся в деформации неровностей, более реалистично передает контакт математически и физически. При сравнении движений горизонтального деформируемого ротора по жесткому статору с упругой поверхностью, полученных на основе стандартной и предложенной моделей, выявлены существенные различия только для прецессионных траекторий с двумя и более контактами за оборот ротора, т.е. при виброударном движении и неполном кольцевом трении.

Заслуживающие внимания экспериментальные результаты обнаружил Куракин [Куракин, 2016, Куракин, 2020]. Это АЧХ, в т.ч. диаграммы Кэмпбелла и траектории, прецессий круглого стального достаточно длинного и фактически симметричного ротора на двух неравножестких шарикоподшипниках с возможностью задевания в районе своей середины статора, симитированного круглой жесткозакрепленной втулкой либо из бронзы, либо из фторопласта, либо из алюминия. В зависимости от соответствующего коэффициента трения скольжения μ и диапазона скоростей вращения выявлены три движения ротора: с ударами по бронзовой втулке (при промежуточном значении μ в резонансном диапазоне), синхронное скольжение по фторопластовой втулке (при малом μ в закритическом диапазоне) и обкатывание алюминиевой втулки (при значительном μ в резонансном диапазоне). При этом в эксперименте с задеванием алюминиевой втулки наблюдались два амплитудных пика,

свидетельствующих об анизотропии жесткости системы, но на других по сравнению с экспериментом без задевания критических частотах, вследствие «подключения» жесткости статора. Вне резонансного диапазона зафиксирована эллиптическая прямая прецессия, но внутри диапазона между критическими скоростями она сменялась орбитой в форме арабской цифры «8» с ударами и участками качения с проскальзыванием ротора по статору. Спектральный анализ близкой к восьмерке прецессии показал существование 1-й, 2-й и последующих гармоник частоты вращения ω вплоть до 12ω . Как в бронзовой, так и во фторопластовой втулке характерные для ротора на анизотропных опорах два пика на двух критических скоростях и обратная прецессия в диапазоне между последними не зарегистрированы, т.е. при контакте признаки влияния анизотропии опор пропадают. При виброударном движении ротора (по бронзовой и фторопластовой втулке в резонансном диапазоне) обнаружены не только 1-я, 2-я и последующие гармоники частоты вращения ω вплоть до 12ω , но и гармоники с кратностью $\frac{1}{2}\omega, \frac{3}{2}\omega, \frac{5}{2}\omega, \frac{7}{2}\omega, \frac{2}{3}\omega, \frac{4}{3}\omega, \frac{5}{3}\omega, \frac{7}{3}\omega, \frac{8}{3}\omega, \frac{10}{3}\omega, \frac{11}{3}\omega$, а также компоненты, частота которых не кратна ω . Появление в спектре колебаний ротора компонент с различными частотами, в т.ч. не кратными частоте вращения, объявляется диагностическим признаком виброударного движения и объясняется тем, что соударение в принятой расчетной модели может происходить как несколько раз за один оборот, так и один раз за несколько оборотов. Это получено численным интегрированием (методом Рунге-Кутты) уравнений движения одномассового гибкого неуравновешенного ротора на неравножестких опорах, контактирующего при выборке зазора с безынерционным статором, имеющим анизотропную жесткость.

Одномассовая и многомассовая математические модели массивного ротора с газогидродинамическими потоками и разбалансировкой от внезапного отрыва одной лопатки на турбине с учетом возможного впоследствии контактного взаимодействия со статором в одном или одновременно

в нескольких сечениях по длине ротора разработаны Шатохиным [Шатохин, 2017, Шатохин, 2018, Шатохин, 2019, Шатохин, 2020]. В его моделях скорость вращения неизменна, поскольку предполагается, что последующие опасные колебания ротора продолжаются короткое время, за которое система аварийного отключения ещё не успевает остановить подачу пара в турбину, и момент на её валу остается постоянным. В качестве возможных мест контакта допускаются все роторные баббитовые подшипники с коэффициентом трения скольжения $\mu=0.07$, а также сечение в пролете или в одном из пролетов ротора с $\mu=0.2$; а именно возле пучности формы колебаний ротора, ближайшей к скорости вращения. Ключевой особенностью моделирования является изменение матрицы жесткости системы такое, что в неё добавляются параметры безынерционного статора, опертого на упруго-демпферные амортизаторы, в те узлы сечений ротора, где выбирается зазор между ними. Составленные матричные уравнения позволяют исследовать развитие роторных колебаний не только при сильных (ударных и безотрывных), но и при слабых (газогидродинамических) взаимодействиях ротора со статором. В частности, их интегрированием методом Рунге-Кутты получено, что если коэффициенты демпфирования статорных амортизаторов не превышают значений соответствующих коэффициентов масляной пленки подшипников, то развивается обкатка ротором статора с гигантскими силами давления между ними и перемещениями системы в целом на амортизаторах (соответственно в тысячи и сотни раз больше веса ротора и зазора между ними). При этом, чем больше побочные коэффициенты матрицы демпфирования (гироскопические силы) подшипников скольжения, тем быстрее устанавливается безотрывное обкатывание [Шатохин, 2018, № 2], которое в дальнейшем постепенно переходит в виброударное движение [Шатохин, 2018, № 3]. При отсутствии статорных амортизаторов и малых коэффициентах потерь энергии в них ($0 \leq \Psi = 2\pi\eta < 0.2$) существенно сокращается время развития обката ($\tau \leq 1.5\text{с}$) и возможность применения средств защиты

($\tau_{\text{stop}}=1.8\text{с}$ – время срабатывания автомата останова, когда момент на валу с турбиной становится равным нулю). При этом подчеркивается, что статорные амортизаторы с $\Psi \geq 0.2$ должны быть расположены в районе каждого подшипника или/и в роторной пучности, только тогда они способны предотвратить развитие обкатки. Также отмечается, что угловая скорость прецессии в случае обкатки совпадает с собственной частотой колебаний системы «ротор-опоры-статор», задаваемой в т.ч. связью статора с упруго-демпферными амортизаторами.

Владжич с соавторами [Vlajic, 2017] представил математические выражения-условия и графические диаграммы (существования), при которых ротор Джеффкотта с крутильной степенью свободы совершает прямую синхронную и обратную прецессии при постоянном контакте со статором всюду жестким за исключением зоны вблизи контактной точки. При этом предполагается типичное для агрегатов нефтедобычи и глубокого бурения отношение крутильной ω_t и поперечной ω_0 собственных частот ротора $\omega_t/\omega_0 \approx 3$, а также как классический, так и более общий закон Кулона с кубической зависимостью от относительной скорости скольжения (рис. 24):

$$\mu(v_{\text{rel}}) = \mu_0 \operatorname{sgn}(v_{\text{rel}}) - \mu_1 v_{\text{rel}} + \mu_2 v_{\text{rel}}^3,$$

где

$$\mu(0) \in [-\mu_0, \mu_0], \quad \mu_1 = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 - \mu_{\min}}{v_{\min}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 - \mu_{\min}}{v_{\min}^3}, \quad \operatorname{sgn}(v_{\text{rel}}) \approx \frac{2}{\pi} \arctan(10^8 v_{\text{rel}}).$$

Итоги их аналитического и численного исследования состоят в том, что учет крутильной степени свободы приводит к колебаниям, которые, быстро нарастая по амплитуде, могут нарушать прямое синхронное безотрывное движение, и напротив, не выявлено никаких условий неустойчивости с крутильными колебаниями для обкатывания.

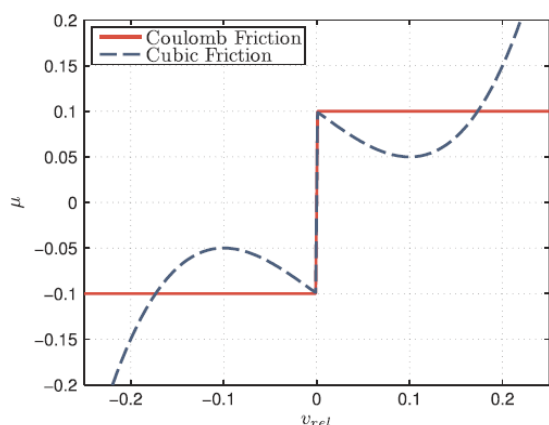


Рис. 24. Коэффициент кулоновского ($\mu_0=0.1$) и кубического трения ($\mu_0=0.1$, $\mu_{\min}=0.05$, $v_{\mu\min}=0.1$) в зависимости от относительной скорости

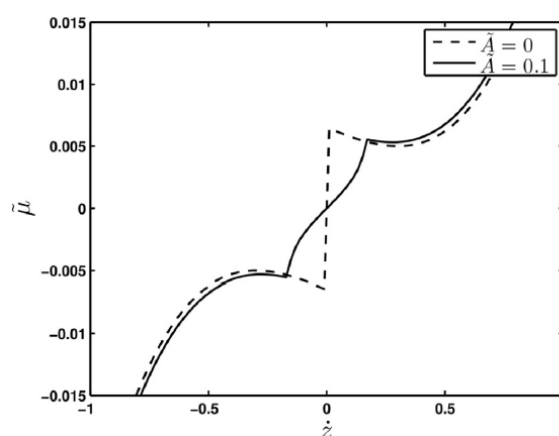


Рис. 25. Коэффициент трения в зависимости от относительной скорости при отсутствии (прерыв. кривая) и существовании (сплош. кривая) высокочастотной пульсации скорости вращения

Аль-Зибдех в соавторстве с другими учеными [AlZibdeh, 2017], используя метод прямого разделения движений [Blekhman, 2000] в теории и сервопривод на практике, продемонстрировали положительные эффекты синусоидальной высокочастотной модуляции скорости вращения (привода) на гибкий ротор для ослабления его безотрывных прецессионных движений; а именно на который либо чисто скользит, либо чисто катится по жесткому статору. Так, разделяя соответствующие «крутильные» дифференциальные уравнения на два подмножества – на одно, описывающее медленные компоненты (медленное движение) и на ещё одно, описывающее быстрые составляющие (быстрое движение), показано, что пульсация скорости вращения, во-первых, ослабляет амплитуду колебаний на основной частоте привода-ротора, а также пики амплитуд на гармониках последней. Во-вторых, увеличивает эффективную жесткость на кручение при прямой синхронной прецессии: с 1 до

$$1 + \left(1 + \frac{me\delta}{J_0 + me^2} \right) \left(\left(\frac{\omega}{\omega_t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\omega_t} \right)^2 \right), \text{ где } me - \text{ роторный дисбаланс, } \delta -$$

радиальный зазор (между ротором и статором), J_0 – осевой момент инерции ротора, ω – скорость вращения, ω_t – первая крутильная собственная частота ротора, A – амплитуда синусоидального возбуждения (в рад/с), а также при

$$\text{обратной (обкатке): с 1 до } 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{meR}{J_0 + me^2} \right)^2 \left(\frac{1}{(1 + \delta/R)^2} \left(\frac{\omega}{\omega_t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\omega_t} \right)^2 \right), \text{ где } r -$$

роторный радиус в месте контакта. В-третьих, вызывает наклон (сглаживание) коэффициента трения в окрестности разрыва при нулевой обезразмеренной медленной компоненте относительной скорости между ротором и статором в точке контакта (рис.25) как при прямом скольжении, так и при обратном.

Поскольку нелинейность от контакта с трением локализована в отдельных местах роторной системы, Кришна и Падманабхан [Krishna, 2018] предложили оригинальное преобразование начальной конечно-элементной модели на основе покомпонентного синтеза и метода гармонического баланса. Система уравнений может быть разделена на первичную и вторичные (системы) так, что нелинейные степени свободы (которые локализованы) образуют master system, а линейные – secondary system(s):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sm} \\ \mathbf{M}_{ms} & \mathbf{M}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{x}}_m \end{Bmatrix} + \frac{p}{\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sm} \\ \mathbf{C}_{ms} & \mathbf{C}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_m \end{Bmatrix} + \frac{p^2}{\omega^2} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sm} \\ \mathbf{K}_{ms} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_m \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{p^2}{\omega^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_m, \dot{\mathbf{x}}_m) \end{Bmatrix} = \frac{p^2}{\omega^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_m(t) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнения преобразуются с помощью безразмерного временного параметра $pt = \omega t$, где ω – основная частота возбуждения, p – целое число, используемое для представления гармонических ($p=1$), а также субгармонических ($p>1$) откликов. При этом вторичная система может быть уменьшена в размере с использованием различных методов редукции [Банах, 2016], в то время как первичная система сохраняется с ее полными

физическими координатами. Данный подход верифицирован натурными экспериментами с однодисковым ротором, который задевает им четырехсекторный статор. Дугообразные 90°-ные секторы (статора) позволяли имитировать как полное, так и частичное кольцевое трение за счет удаления одного или нескольких секторов, причем каждый из секторов был связан с датчиком силы. Последнее помогло сопоставить контактное усилие, испытываемое системой во время трения, и подтвердить, что оно носит импульсный характер такой, что каждый датчик регистрировал только одно значительное нагружение (один удар) за оборот ротора в окрестности своей первой критической скорости.

Работа Мохтара и др. [Mokhtar, 2018] показывает влияние колебаний статора, представленного в виде нескольких балочных конечных элементов, в случае его ударного взаимодействия с гибким ротором в зависимости от изгибной жесткости статора. В самом месте удара предполагается периодическое взаимоограничение в виде появления пружины большой жесткости или добавки в уравнение движения системы глобальной матрицы нормальных и тангенциальных контактных сил $[G_{NT}]$:

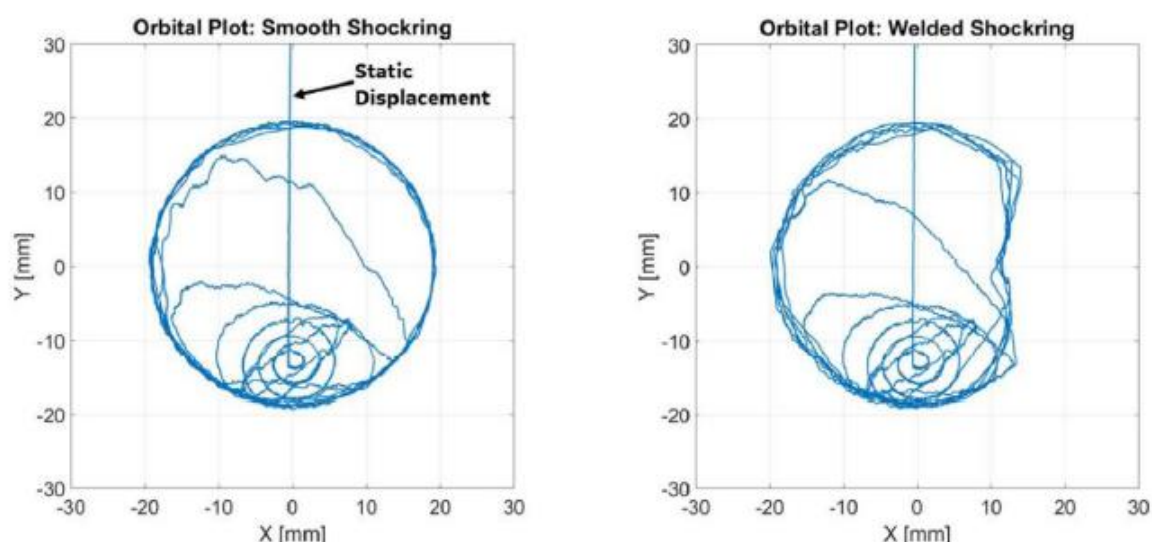
$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} + [G_{NT}]^T \{f_N\} = \{f\}.$$

При этом предложенная модель системы содержит матрицу гироскопических моментов и матрицу рэлеевского демпфирования:

$$[C] = \omega[G] + [D], \quad [D] = \alpha[M] + \beta[K], \quad \alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \beta = \frac{2(\omega_1\xi_1 - \omega_2\xi_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$

где $[M]$ и $[K]$ – матрицы инерции и жесткости бесконтактной системы «ротор-статор», $\omega_{1,2}$ – первая и вторая собственные частоты бесконтактной системы, $\xi_{1,2}$ – соответствующие модальные коэффициенты демпфирования. Результатами работы являются частотные спектры колебаний, как ротора, так и статора, которые содержат субгармоники частоты вращения, такие как: $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$, $\frac{3}{2}\omega$ или/и $\frac{5}{2}\omega$.

Попп и др. [Popp, 2018] в своей работе не без оснований, исходя из большого собственного опыта теоретического и натурного моделирования, утверждают, что движения реальной буровой колонны с гладким и не совсем круглым профилем, в частности из-за сварного шва вдоль оси, а также со статическим отклонением (с несоосностью) могут быть описаны с высокой точностью по частоте/амплитуде поперечных колебаний, если пользоваться трехмерными конечными элементами. При этом ими получен новый специфический результат относительно обратной прецессии – в гладкой колонне устанавливается круговое, а в негладкой – прерывистое обкатывание (рис. 26).



**Рис. 26. Траектории 3D-модельного бура в бесшовной и в сваренной
контактной обойме (трубе) колонны**

Уилкс [Wilkes, 2018] численно исследовал качение круглого ротора со скольжением по анизотропно закрепленному статору, обосновав актуальность такой системы практикой. В реальных корпусных конструкциях «путь нагрузки к земле» обычно намного «жестче» в вертикальном направлении, чем в горизонтальном, т.е. удержание ротора мягче по горизонтали, чем по вертикали. Обычно такая асимметрия варьируется от легкой до умеренной,

но в случае роторов большой массы может быть многократной и в пределе с разницей в 20 раз. Построив траектории движений ротора и статора, которые оказались эллиптическими, он также построил траекторию относительного их движения, которая оказалась круговой. Тем самым он получил, что уравнение связи Блэка [Black1968] при обратном безотрывном движении,

$$z_r - z_s = \delta e^{i(-\Omega t + \gamma)}, \quad (4)$$

где $z_r = Z_r e^{-i\Omega t} + \alpha Z_r e^{i\Omega t}$, $z_s = Z_s e^{-i\Omega t} + \beta Z_s e^{i\Omega t}$, α (β) – отношение амплитудных компонент прямой к обратной прецессии ротора (статора), остается в силе, в т.ч. при сильной статорной асимметрии. И нет никаких предпосылок того, что высшие гармоники будут мешать решению (4), в котором предполагается, что ротор и статор совершают нециркулярные обратные прецессии с одной фиксированной частотой.

Работа Баба с коллегами [Bab2019] посвящена оценке эффективности при обкатке NES-виброгасителя от англ. nonlinear energy sink [Guo, 2015], представляющего собой массу-ползунок, скользящую по неподвижно закрепленному внутри полого ротора стержню, а также соединенную с ротором двумя линейными пружинами, располагаемыми поперечно стержню (по обе стороны от массы-ползунка). Так как любые возникающие поперечные колебания ротора приводят к относительному движению между ротором и NES, то это в их теории создает кубическую нелинейность для подвижного направления последнего и широкополосное гашение роторной вибрации. Связанные уравнения нестационарного движения системы при изгибно-крутильных колебаниях разгоняющегося двухдискового ротора, вследствие обкатки обоими дисками статора, – одно комплексное дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка и одно обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка преобразуются. К системе применен метод Галеркина с использованием первых трех форм изгибных колебаний ротора с учетом того, что вследствие податливых подшипников

первые две моды имеют малую кривизну и являются почти жесткими модами. После преобразования двух исходных связанных уравнений сначала в четыре ОДУ 2-го порядка, а затем в восемь ОДУ 1-го порядка последние численно решаются с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка. При этом предполагается, что динамический дисбаланс в двух дисках имеет разность фаз 90° , следовательно, возбуждаются все изгибные моды ротора, включая четные и нечетные. Выполненные расчеты для ротора без и с NES показали, что действенность NES может значительно снижаться и даже иметь отрицательные эффекты в виде увеличения продолжительности обкатывания, роста амплитуды сопряженной обратной прецессии и замедления разгона.

Здесь же уместно добавить про сравнение действий линейного и нелинейного ползунковых виброгасителей [Tehrani, 2018], а также про исследование влияния нового магнитного NES [Yao, 2020] на снижение вибрации несбалансированного ротора, но пока без контакта со статором. В частности, Тегерани и его соавтор отметили ухудшение работы обоих виброгасителей при больших и малых эксцентриситетах. При больших – их массы (центробежные силы) оказываются недостаточными, чтобы компенсировать дисбаланс (силу неуравновешенности) ротора. При малых – наоборот, их массы избыточны для имеющегося роторного эксцентриситета, и виброгасители действуют как присоединённые дебалансы.

Эхехальт с соавторами [Ehehalt, 2019], наблюдая за различными модификациями реального вала с дисками, взаимодействующего с вязкоупругим статором, пришли к нескольким выводам. Синхронное безотрывное движение может происходить, когда ротор и статор изотропны. Субгармонические контактные колебания возникают, если ротор и статор несоосны. Существование обратного безотрывного движения сильно зависит от соотношения между коэффициентами трения скольжения и конструкционного демпфирования. Однако эти два параметра, а также частота вращения практически не влияют на частоту обкатки с проскальзыванием. В отличие от

частоты, амплитуда сопряженной обратной прецессии существенно возрастает с увеличением μ и убывает с повышением затухания в роторе. Все динамические свойства – частотные и амплитудные составляющие, в т.ч. орбиты, зарегистрированные в простых контактных системах, включающих по одной степени свободы для ротора и статора, наблюдаются в многомассовых контактных системах, когда роторные и статорные собственные частоты отстроены. Однако в многочастотных системах «ротор-статор» модальные взаимодействия приводят к сосуществованию нескольких характеристик обкатки. Сопряженные обратные прецессии имеют разные частоты и амплитуды так, что последние резко изменяются, когда движение скачком меняется от одной обратной прецессии к другой.

Хун с коллегами [Hong, 2019] оценили влияние трения между неуравновешенным ротором Джеффкотта и безынерционным статором на такие модальные характеристики как на модальную частоту, на модальное демпфирование, на устойчивость, а также на взаимодействие между нелинейным движением моды и откликами ротора. Уравнения сложного нелинейного движения в безразмерной форме оригинально численно решаются методом Ньютона-Рафсона после разложения в ряды Фурье:

$$X = a_x^0 + \sum_{k=1}^l e^{-k\beta\tau} (b_x^k \cos k\Omega\tau + a_x^k \sin k\Omega\tau), \quad Y = a_y^0 + \sum_{k=1}^l e^{-k\beta\tau} (b_y^k \cos k\Omega\tau + a_y^k \sin k\Omega\tau),$$
$$F_x = p_x^0 + \sum_{k=1}^l e^{-k\beta\tau} (q_x^k \cos k\Omega\tau + p_x^k \sin k\Omega\tau), \quad F_y = p_y^0 + \sum_{k=1}^l e^{-k\beta\tau} (q_y^k \cos k\Omega\tau + p_y^k \sin k\Omega\tau)$$

и нормализации мод по аналогии с линейными системами относительно произвольно выбранной степени свободы. Авторами учитывается, что нелинейные контактные силы зависят только от вибрационного смещения ротора в направлениях X , Y , и следовательно, эти силы тоже можно разложить в ряды Фурье. Величины с верхним индексом k обозначают компоненты k -го порядка перемещений и контактных сил. Число гармонических членов k выбирается равным 5. Параметр β учитывает затухание нелинейного модового

движения, вызванное линейным демпфированием и нелинейной силой контактного трения. При этом, во-первых, при сохранении только первой гармоники ($k=1$) решение вырождается в хорошо известное экспоненциальное предположение для линейных систем с демпфированием. Во-вторых, для консервативных автономных систем демпфирующий член β равен нулю, и записанные решения полностью эквивалентны традиционному методу гармонического баланса. Кроме того, алгоритм чередующейся частотно-временной области [Laxalde2009] используется для получения нелинейных контактных сил в частотной области. По рассчитанным круговым безотрывным движениям получено, что только основная составляющая модальной частоты существует в частотной области, т.е. комплексное решение упрощается до формы только с первой гармоникой ($k=1$): $W = X + iY = He^{\lambda\tau}$, где H – действительная положительная константа. Эта модальная частота для прямой и обратной прецессии не зависит от скорости вращения, заключена в диапазон между собственной частотой линейно упругого ротора без трения и собственной частотой связанной линейной системой «ротор-статор» и плавно повышается от первой ко второй из упомянутых с увеличением амплитуды движения моды (модальной амплитуды). В отличие от безотрывного прецессионного движения ротора в прямом направлении, обратное – не всегда устойчиво, поскольку в некоторых случаях его модальное демпфирование может быть меньше нуля.

Картхик и Виджаян [Karthek, 2019] указали на возможность взаимодействия между модами прямой и обратной прецессий для двухдискового ротора при одноточечном контакте со статором. Задевание с трением приводит к нелинейным или неустановившимся колебаниям; а именно к субсинхронным или субгармоническим порядка $\frac{1}{2}$ скорости вращения, а также к суперсинхронным или с высшими гармониками ω . Построенная ими диаграмма Кэмпбелла демонстрирует частоты собственных прецессий ротора, которые сначала из-за гироскопических эффектов распадаются на

соответствующие прямым и обратным модам, а затем (при высоких скоростях вращения) из-за контакта-трения сближаются друг с другом.

Чтобы предотвратить безотрывное скольжение и качение гибкого ротора по ограничительной опоре (роторного прогиба), Ови [Ovi, 2019] опробовал вместо круглой контактной поверхности так называемую «лимонную» расточку втулки опоры. Для этого он построил оригинальную математическую модель взаимодействия неуравновешенного ротора Джеффкотта с неподвижной вязкоупругой поверхностью в форме лимона, а также провел вычислительные и натурные эксперименты. В результате, во всех случаях с коэффициентом трения скольжения 0.1 и больше возникало обкатывание вблизи и после критической скорости ротора. При этом фазовый угол между силой инерции ротора $m\Omega^2$, пропорциональной квадрату скорости прецессии, и его прогибом ρ был почти равным нулю, т.е. фазовый сдвиг в случаях обкатки и «лимонного» и кругового зазора был аналогичным. Тем не менее, за счет значительной «лимонной» расточки удавалось устранить синхронное скольжение, обеспечивая после резонанса бесконтактное «лунное» движение неуравновешенного ротора с типичным фазовым углом, стремящимся к -180° . При малой «лимонной» расточке в закритическом диапазоне выявлено прямое контактное движение с прецессионной скоростью, равной примерно половине скорости вращения, и фазовым сдвигом, принимающим случайное значение в интервале от -80° до 50° .

Недавно замечена новая особенность задевания – мгновенные частоты основных компонентов в вибрационном отклике ротора начинают колебаться вокруг значений частоты вращения и её целых кратных (супергармоник ω), когда начинается трение о статор. Это позволяет развивать методику такую, как вариационная нелинейная декомпозиция колеблющихся мод (VNCMD), с помощью которой вибрационный отклик ротора разбивается на отдельные

режимы и определяется колеблющееся поведение мгновенной основной частоты для обнаружения контактного трения в системе [Zhou, 2019].

Последние фундаментальные работы 20-х гг.

АЛЬ-Шудейфат и др. [AL-Shudeifat, 2020] рассмотрели угловые колебания жесткого гироскопического ротора на неравножестких опорах в условиях его быстрого перехода через критические числа оборотов и контакта с изотропно-упругим статором, а также с учетом неуравновешенности и веса ротора. Они, помимо известной, что предсказывается любой диаграммой Кэмпбелла, и называемой ими предрезонансной полосы обратной прецессии, акцентируют внимание на существующей после критического диапазона и названной ими пострезонансной полосе обратной прецессии. Их полноспектральный анализ показывает, что чем больше угловое ускорение ротора, анизотропия его опор и жесткость статора, тем шире зона пострезонансной обратной прецессии ротора. При этом в пред- и пострезонансных зонах частоты прецессий одинаковы и меньше критической частоты прямой прецессии ротора.

Бехсад и Альванди [Behzad, 2020] изменили кольцевой профиль зазора со стороны статорной поверхности на трехгранный для того, чтобы повлиять на характеристики обкатывания. Результаты их испытаний и численных решений на основе метода лагранжева множителя [Wriggers, 2006] или метода штрафной функции показали, что при высокой степени трехгранности частота и амплитуда обратной прецессии круглого ротора существенно уменьшаются вплоть до значений (рис. 27), приводящих к дестабилизации и самопроизвольному прекращению обкатки. При этом орбиты движений ротора и статора становятся некруглыми хаотическими (траектории точно не повторяются в последовательных прецессиях), а также супергармонические компоненты появляются в спектрах их колебаний, что авторы связывают с появлением ударов в системе. Также ими делается вывод, что повышение трехгранности действует как уменьшение коэффициента трения при кольцевом профиле зазора.

Го с партнерами [Guo, 2020] проанализировали переход от сравнительно безопасного синхронного скольжения к опасному качению неуравновешенного

ротора по жесткозакрепленному статору под воздействием случайных колебаний или просто шума. Они с использованием функций стохастической чувствительности и плотности вероятности показали, что при меньших скоростях вращения и интенсивности шума удастся сохранить первое периодическое движение, но при высоких – начинаются квазипериодические* (обкатка и с неполным кольцевым трением) и сойти с них к чистому скольжению со скоростью ω не получается.

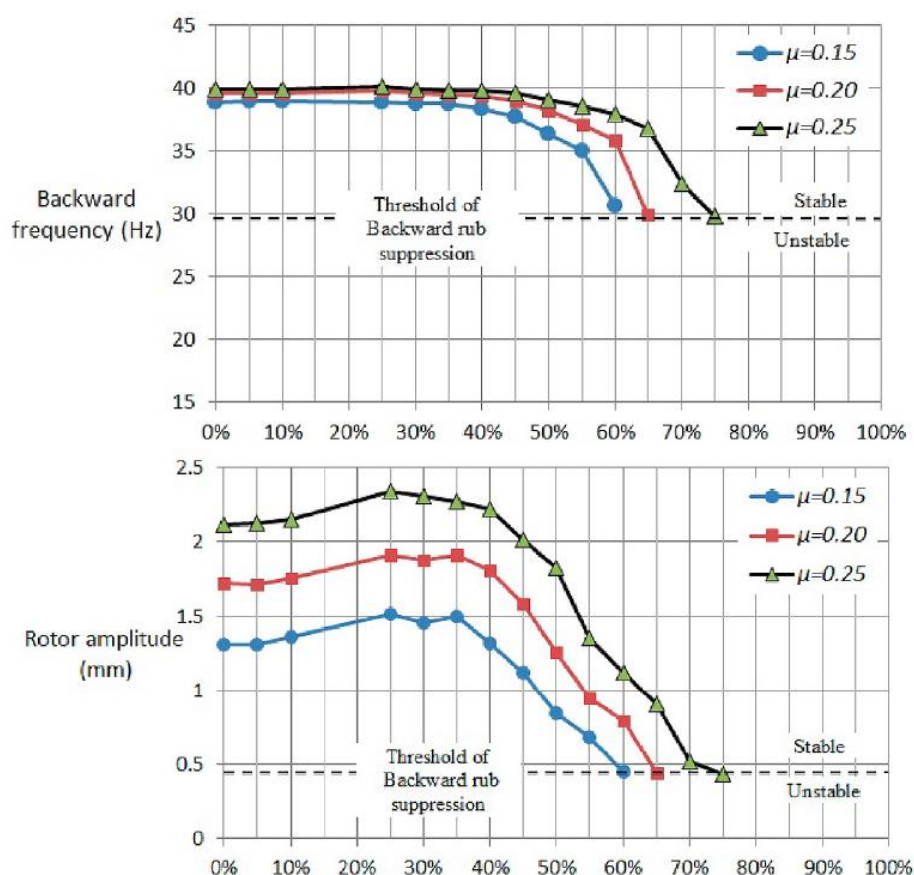


Рис. 27. АЧХ при обкатке круглым ротором упругозакрепленного статора в зависимости от степени трансформации кольцевой (0%) в трехгранную статорную поверхность

Учитывая только осевое смещение ротора и поперечно-крутильные колебания статора, Мерсье со своей группой исследователей [Mercier, 2020]

*Во время квазипериодического движения ротор колеблется (совершает прецессию) с частотой, которая представляет собой линейную комбинацию двух несоразмерных частот, одна из которых является оборотной, а другая неизвестной.

описали явление «визга», сопровождающего контакт между боковыми поверхностями диска ротора и диска статора. Этот режим – результат связи между относительным вращением и относительным осевым перемещением ротора и статора. Ими показано, что «визг» всегда возникает после прецессионного движения (крутильной моды) статора. Однако в одном системном состоянии, когда частоты статорной прецессии и «визга» совпадают, они могут существовать одновременно, а в другом – при низкой скорости вращения – «визга» не бывает.

Ван и др. [Wang, 2020] попробовали использовать магнитореологический демпфер для предотвращения обкатки и уменьшения уровня вибрации системы «ротор-статор» при ударах. Их численный анализ, построенный на сравнении со случаем отсутствия намагничивающего тока, показывает, что с помощью такого демпфера удастся лишь смягчить амплитудную реакцию системы на контактное трение, причем все сопряженные с задеванием периодические, квазипериодические и хаотические колебания сохраняются. Более того, если приложенный ток оказывается выше некоторого предела, то демпфер увеличивает нелинейность роторной системы, усиливает виброактивность и приводит к неустойчивости.

Бринд с соавторами [Briend, 2021] численно и экспериментально проанализировали ситуацию возбуждения обкатки во вращающейся с постоянной скоростью неуравновешенной роторной системе, учитывая осевое смещение и угол закручивания каждого конечного элемента, за счет ударов по статору, т.е. его колебаний как твердого тела на упругих опорах. Оценивая влияние коэффициента трения скольжения, амплитуды и направления поступательного смещения статора, они рассчитанными траекториями движений и высокоскоростной видеосъемкой показали, что для старта обкатывания определяющее значение имеет угловое положение ротора на его орбите при толчке со стороны статора, а следовательно, и угол контакта (удара).

Чипато, Шоу и Фрисвелл [Chipato, 2019, Chipato, 2021] уделяют своё внимание взаимодействию низших мод гироскопического ротора между собой, возбуждаемых ударами по статору с малым трением скольжения ($\mu < 0.12$). В первой работе используется модель с двумя степенями свободы и одним контактным местом, во второй – конечно-элементная модель, допускающая до двух мест контакта. С помощью графиков спектральной интенсивности, орбит, бифуркаций и Пуанкаре показано, что в системе «ротор-статор» устойчиво сосуществуют два асинхронных виброударных движения в прямом и обратном вращению направлениях с угловыми скоростями, синхронизированными с оборотами ротора. Это происходит в диапазоне далеко от критической скорости и может происходить без трения. Кроме соответствующих диапазонов, идентифицированных с помощью построения траекторий и Фурье-спектров колебаний во вращающейся системе отсчета как внутренние резонансы типа $p:1$, т.е. когда соотношение между двумя собственными частотами заданной системы близко к целому числу (1,2,3,...), отмечена расширяющаяся с увеличением μ полоса скоростей с безотрывным движением, большим прогибом ротора и доминирующей там частотной компонентой, совпадающей с частотой обратной прецессии усиленной (контактной жесткостью) системы.

Шриваставом и его коллегами [Srivastava, 2021] предложена модель контакта с функцией сглаживания на основе гиперболического тангенса вместо, так называемой, *heaviside function*. Эта модель опробована на неуравновешенном роторе Джеффкотта, который взаимодействует с упругим безынерционным статором. За счет сглаживания время вычислений сокращено в более чем 10 раз без существенной потери точности. Их процедура эффективно отслеживает появление асинхронной частоты и пульсации оборотной в спектре мгновенных частот системы при задевании ротора за статор. В результате выяснено, что ротор может демонстрировать как прямое, так и обратное квазипериодические движения с длиной дуги контакта меньшей

и равной 2π , т.е. с прерывистым и постоянным трением, причем обкатывание совершается с частотой связанной системы «ротор-статор». В завершение, руководствуясь теорией Флоке, ротор при обкатке объявляется ими нестабильным, при этом вычисляются границы нестабильности (начала обкатки) от трех безразмерных параметров системы. В том числе устанавливается, что чем меньше отношение жесткостей ротора и статора, а также чем меньше вязкое демпфирование на роторе и больше коэффициент трения скольжения, тем ниже частота вращения, при которой начинается обкатывание.

Ю и Чен [Yu, 2021] за счет синтеза методов гармонического баланса и доверительных областей, а также процедуры Галеркина рассчитали нелинейные колебания системы «ротор-статор» с контактом-трением в затухающем полигармоническом виде:

$$\mathbf{u}(\tau) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^l \mathbf{U}_{n,k} \exp(k\lambda_n \tau) \right).$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор реальных перемещений, $\mathbf{U}_{n,k}$ – комплексный вектор, содержащий коэффициенты, связанные с k -й гармонической составляющей (или кратко гармоникой) для всех степеней свободы, которые представляют нелинейные колебания n -й моды, λ_n – комплексная частота (модальная с демпфированием), связанная с n -й нелинейной модой. Если сохраняется только первая гармоника ($k=1$), решение вырождается в известное экспоненциальное для линейных демпфированных систем. При этом также входящие в уравнения (системы) нелинейные силы $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ выражаются через усеченный ряд Фурье:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^l \mathbf{G}_{n,k} \exp(k\lambda_n \tau) \right),$$

где $\mathbf{G}_{n,k}$ – комплексный вектор, содержащий коэффициенты силы контактного трения, находится посредством прямого (FFT) и обратного (IFFT) Фурье преобразований на каждом шаге решения:

$$[\mathbf{U}_{n,0} \dots \mathbf{U}_{n,k} \dots \mathbf{U}_{n,l}]^T \xrightarrow{\text{IFFT}} \mathbf{u}(\tau) \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}(\tau)) \xrightarrow{\text{FFT}} [\mathbf{G}_{n,0} \dots \mathbf{G}_{n,k} \dots \mathbf{G}_{n,l}]^T.$$

В результате ими делается ряд выводов. Модальная частота трещейся системы «ротор-статор» находится между собственными частотами двух систем без контакта-трения и с линейно-упругой связью при отсутствии зазора и силы трения (между ротором и статором). Поэтому можно отказаться от сложного нелинейного модального расчета и выполнять простой линейный модальный анализ для оценки модальной частоты трещейся системы. Траектории всех модальных движений (прямых и обратных форм прецессий) ротора и статора при трении круговые и согласованы по фазе и амплитуде. Причем первая гармоника намного больше, чем вторая и другие высшие гармоники для каждой (для n -й) моды. В целом, прецессионные движения ротора и статора представляют собой либо только основные колебания (с наименьшей роторной частотой), тогда они перемещаются синфазно, а отношение роторной амплитуды A_r к статорной A_s всегда больше 1, либо только колебания со второй системной (статорной) частотой, тогда ротор и статор перемещаются в противофазе, а отношение радиусов их прецессий $A_r/A_s < 1$. При контакте-трении обе формы (роторная и статорная моды) прямой прецессии всегда устойчивы, тогда как обе формы обратной прецессии в некоторых случаях могут быть неустойчивыми (незатухающими). Кроме того, явление скачкообразного перехода ко второй форме обратной прецессии в системе с трением отмечено. Устойчивость (затухание) форм обратной прецессии повышается при уменьшении коэффициента трения μ . Модальная частота трещейся системы «ротор-статор» не чувствительна к μ .

Заключительная часть (выводы и перспективы на будущее)

Итак, всё сделанное по контактной роторной динамике примерно до 2010 года можно охарактеризовать как «геологоразведка», а то, что после – «освоением территории» с выработкой теоретических предсказаний и практических решений для обеспечения при возможных контактах нормального функционирования реальных вращающихся машин и механизмов с большим числом степеней свободы и малыми зазорами. Наиболее подробно дан обзор научной литературы по безотрывному движению ротора по статору. Подводя итоги, легко подтвердить актуальность поиска условий для уменьшения контактно-динамических нагрузок (контактных сил, амплитуды и частоты поперечных колебаний), особенно при обкатке, а в идеале к её исключению.

В общем, посредством расчетных и натурных моделей ротора со статором, может быть заключено следующее.

- Любое контактное взаимодействие ротора со статором – это мультифизическое явление, в котором глобальные эффекты вращения и прецессии, т.е. динамические характеристики системы в целом, связаны с локальными эффектами трения, т.е. с термомеханическими характеристиками трущихся поверхностей (упругопластичностью, вязкостью, истираемостью и температурой).

- Обкатка возбуждается, если скорость вращения превышает первую критическую ротора, и в результате задевания за статор тангенциальная скорость оси ротора оказывается направленной против его вращения. В частности, тогда сравнительно неопасное прямое прецессионное движение ротора с конечным или бесконечным числом соударений или в форме синхронного скольжения по статору переходит в нештатное обратное движение в форме чистого качения или более вероятного качения с проскальзыванием.

- При чистом качении относительная скорость $v_{\text{отн}}$ контактных площадок ротора и статора (в области контакта) и, следовательно, сила трения равны нулю, тем не менее, упругопластические деформации поверхностей и нормальное давление N ротора на статор, пропорциональное квадрату частоты роторной прецессии, значительны, поскольку последняя при обкатке без проскальзывания пропорциональна частоте вращения, радиусу r ротора в контактном месте и обратно пропорциональна выбираемому радиальному зазору δ , а также априори $r \gg \delta$.

- При качении с проскальзыванием $v_{\text{отн}} \neq 0$, возникает пропорциональная N сила контактного трения, а роторная прецессионная частота близка к той или иной собственной частоте системы «ротор-статор» без зазора, т.е. с жесткой связью, в месте их контакта, что в совокупности вызывает стремительные истирание и нагрев ротора/статора. По-видимому, из многих работ, например, из [Уи, 2012], частотный диапазон обкатки зависит от отношения коэффициентов конструкционного демпфирования и контактного трения.

- При виброударном движении ротора по статору искажается гармоническая форма роторных перемещений в поперечном направлении, в результате в спектре колебаний ротора наряду с оборотной 1ω или основной гармонической составляющей вибрации (или по-другому гармоникой) появляются высшие гармоники 2ω , 3ω и др. В случае малого коэффициента трения скольжения возникают также субгармонические компоненты $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{1}{4}\omega$ и даже $\frac{1}{5}\omega$. При значительном коэффициенте трения присутствуют только субгармоническая составляющая $\frac{1}{2}\omega$, а также высшие гармоники 2ω и 3ω с низкими амплитудами.

- Виброударное движение, которое имеет хаотическое содержание, т.е. представляет собой непредсказуемое поведение, обусловлено существованием нескольких нелинейностей в системе, что сопровождается

множеством корней, и лишь часть из них может быть связана с взаимодействием между вращающейся и неподвижной подсистемами.

- В случае прерывистых контактов возбуждаются крутильные колебания ротора как повторяющиеся переходные возмущения его вращения.

- Эффективные способы избежать разрушительной обкатки состоят в том, чтобы иметь минимально возможный коэффициент трения на контактных поверхностях ротора и статора или минимально возможный коэффициент восстановления при их ударе или максимально возможное конструкционное демпфирование со стороны роторных и статорных опор.

- Исходя из проведенного обзора литературы и собранных статистических данных, а также из построенной по ним диаграммы (рис. 28), количество эмпирических научных трудов в сравнении с теоретическими по контактному взаимодействию ротора со статором относительно низкое (или они не очень доступны), т.к. эксперименты с обкаткой трудно проводить и опасны.

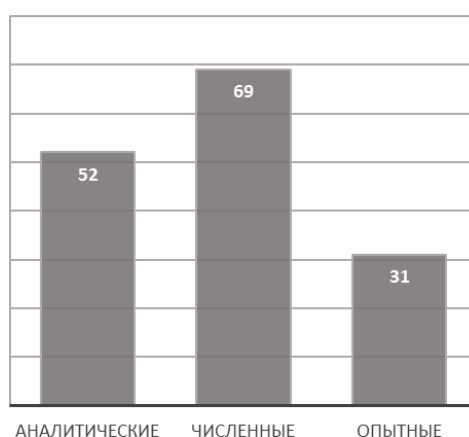


Рис. 28. Общее число суммированных по методологии научно-исследовательских работ, посвященных контактной динамике ротора со статором и представленных в монографии

К числу критических замечаний по разработанным математическим и экспериментальным моделям «ротор-статор» относительно их способностей имитировать реальный отклик системы, особенно при обкатке, можно отнести следующее.

- Предсказание возможности обкатки не означает, что она произойдет – это зависит от многих параметров и начальных условий, поэтому полезнее предсказание невозможности обкатки, которое исключает такое поведение системы.

- Пока не ясны причины и условия устойчивости и сосуществования нескольких форм (многорежимность) обкатки с различными частотами сопряженной с ней обратной прецессии. По факту нет моделей, которые бы успешно прогнозировали эти процессы.

- Все ещё отсутствует обобщающая теория обкатки ротором статора с универсальным исследовательским и инженерным подходом, т.е. математическим аппаратом, применимым к различным вращающимся системам с малыми зазорами до неподвижных подсистем.

- Большинство моделей допускает задевание ротора за статор в специально отведенном месте. В реальных машинах оно может происходить в нескольких местах (обычно на щелевых уплотнениях). Поскольку трение о статор оказывает большое влияние на ротор, необходим анализ его прецессионного движения с учетом всех возможных контактных мест.

- Существующие модели имеют, как правило, нерепрезентативные малую роторную поперечную жесткость по сравнению со статорной, малое отношение радиуса ротора к радиальному зазору в месте контакта, малое или напротив слишком большое конструкционное или контактное трение.

- Для повышения точности прогнозирования контактной динамики системы «ротор-статор» требуется синтез механических, трибологических и термических процессов. Например, такой, где трехмерная многотельная модель системы даст возможность более достоверного описания контактов и

отклонений, особенно в случае с лопатками, в т.ч. с эффектами геометрической нелинейности и смягчения с вращением (центробежный эффект), подмодель износа позволит отслеживать изменение условий контакта (коэффициент трения, зазор и др.), а тепловая подмодель позволит контролировать температуру элементов системы.

Библиография

1. *Ахметшин И.Х., Нагаев Р.Ф.* Динамика неуравновешенного ротора с сухим трением в подшипнике // Известия РАН. Механика твердого тела, 1995, №5. С.57-63.
2. *Банах Л.Я.* Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором // Машиноведение, 1965, №1. С.70-77.
3. *Банах Л.Я.* Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. 292 с.
4. *Бородин В.С.* Движение диска в режиме обкатывания подвижного цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, 2004, №30. С.206-208.
5. *Денисов Г.Г., Неймарк Ю.И., Сандалов В.М., Цветков Ю.В.* Об обкате ротора по жесткому подшипнику // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1973. №6. С.4-13.
6. *Денисов Г.Г., Неймарк Ю.И., Сандалов В.М., Цветков Ю.В.* О взаимодействии ротора с подшипником скольжения при учете податливости опоры // Динамика систем. Математические методы теории колебаний. Межвузовский сборник. Горький, Издание ГГУ им. Н.И. Лобачевского, 1979. С.131-160.
7. *Кобринский А.Е., Кобринский А.А.* Виброударные системы. М: Наука, 1973. 591 с.
8. *Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Циммерман С.Д.* Численное моделирование нестационарных колебаний после внезапной разбалансировки многоопорного ротора с обкатом неуравновешенного ротора по статору // Авиационно-космическая техника и технология, 2011, №8 (85). С.81-93.

9. Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Волоховская О.А. Движение неуравновешенного ротора при задеваниях о статор // Теплоэнергетика, 2012, №2. С.3-11.

10. Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Волоховская О.А. Особенности движения ротора с задеванием о статор // Теплоэнергетика, 2013, №9. С.21-27. DOI: 10.1134/S0040363613090051

11. Куракин А.Д., Нихамкин М.Ш., Семенов С.В. Динамика неуравновешенного гибкого ротора в анизотропных опорах при контакте со статором // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2016, №4. С.364-381. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.21

12. Куракин А.Д. Влияние трения на вибрационные характеристики роторной системы при задевании ротора о статор // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника, 2020, №61. С.22-30. DOI: 10.15593/2224-9982/2020.61.03

13. Никифоров А.Н. Прикладная полуэмпирическая теория безотрывного движения ротора по статору / Монография. – Санкт-Петербург: ООО "СУПЕР Издательство", 2021. – 280 с. – ISBN 978-5-9965-1737-4. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47349654>

14. Олимпиев В.И. Об обкате неуравновешенного гибкого ротора по статору // Машиноведение, 1976. №1. С.52-56.

15. Павлов Г.В., Бородин В.С. Нутационные автопараметрические колебания вертикального ротора при обкатывании статора // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, 2004, №26. С.48-51.

16. Павлов Г.В., Бородин В.С. Качение неуравновешенного ротора внутри горизонтального цилиндра // Вестник Самарского государственного

технического университета. Серия: Физико-математические науки, 2005, №38. С.65-71.

17. Позняк Э.Л. Крутильный удар в валопроводе при внезапной и сильной разбалансировке одного из роторов // Машиноведение, 1987. №5. С.66-74.

18. Сандалов В.М., Цветков Ю.В. Об обкате нагруженного ротора по жесткому подшипнику // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1979. №3. С.52-56.

19. Шатохин В.Ф. Возбуждающие обкат силы при колебаниях ротора с задеваниями о статор // Теплоэнергетика, 2017, №7. С.22-32. DOI: 10.1134/S0040363617070074

20. Шатохин В.Ф. Обкат ротором подшипника с водяной смазкой // Теплоэнергетика, 2018, №2. С.19-23. DOI: 10.1134/S0040363618020054

21. Шатохин В.Ф. Режимы обката ротором статора при изменении компонентов демпфирования // Теплоэнергетика, 2018, №3. С.23-30. DOI: 10.1134/S0040363618030062

22. Шатохин В.Ф. Погашающая способность демпферных устройств при обкате ротором статора // Теплоэнергетика, 2019, №2. С.32-40. DOI: 10.1134/S0040363619020061

23. Шатохин В.Ф. Колебания ротора турбогенератора с задеваниями в пролете и опорах // Теплоэнергетика, 2020, №5. С.25-30. DOI: 10.1134/S0040363620050094

24. Alber O., Norrick N., Siegl B. Multimode Backward Whirl Motion in Rotor-Stator Contact. 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2013), Lisbon, Portugal. Paper No: 289.

25. Alber O. Experimental Analysis of Rotor-Stator Contact with Many Degrees of Freedom. Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics. Vol.21 (2015), pp.1935-1944. DOI: 10.1007/978-3-319-06590-8_160

26. AlZibdeh A., AlQaradawi M., Balachandran B. Effects of high frequency drive speed modulation on rotor with continuous stator contact. International Journal of Mechanical Sciences. Vol.131-132 (2017), pp.559-571, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.004>

27. AL-Shudeifat M.A., Friswell M., Shiryayev O., Nataraj C. On post-resonance backward whirl in an overhung rotor with snubbing contact. Nonlinear Dynamics. Vol.101 (2020), pp.741-754, <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05784-3>

28. Bab S., Najafi M., Sola J.F., Abbasi A. Annihilation of non-stationary vibration of a gas turbine rotor system under rub-impact effect using a nonlinear absorber. Mechanism and Machine Theory. Vol.139 (2019), pp.379-406, <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.05.005>

29. Bartha A.R. Dry Friction Backward Whirl of Rotors. Dissertation ETH No.13817. Zurich, 2000. 247 p.

30. Beatty R.F. Differentiating Rotor Response Due to Radial Rubbing. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. Vol.107, No.2 (1985), pp.151-160. Пер. с англ. – Битти. Выявление особенностей радиальных колебаний ротора при его задеваниях за корпус // Конструирование и технология машиностроения, 1985, №2. С.1-13.

31. Begg I.C. Friction Induced Rotor Whirl – A Study in Stability, Journal of Engineering for Industry. Vol.96, No.2 (1974), pp.450-454. Пер. с англ. – Бегг. Исследование устойчивости вызванного трением вихревого движения ротора // Конструирование и технология машиностроения, 1974, №2. С.63-67.

32. Behzad M., Alvandi M. Friction-induced backward rub of rotors in non-annular clearances: Experimental observations and numerical analysis. Tribology International. Vol.152 (2020). Article No: 106430, <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106430>

33. Bhattacharya A., Childs D.W. Dry-friction whirl and whip between a rotor and a stator: effect of rotor-stator coupling due to seals and rotor rigid-body

dynamics. Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air. Paper No: GT2009-59979, pp.963-972, <https://doi.org/10.1115/GT2009-59979>

34. *Billett R.A.* Shaft Wheel Induced by Dry Friction. The Engineer. Vol.220, No.5727 (1965), pp.713-714.

35. *Black H.F.* Interaction of a Whirling Rotor with a Vibrating Stator across a Clearance Annulus. Journal of Mechanical Engineering Science. Vol.10, No.1 (1968), pp.1-12.

36. *Blekhman I.I.* Vibrational Mechanics: Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. World Scientific Publishing Company, 2000. 536 p.

37. *Briend Y., Chatelet E., Dufour R., Andrianoely M.-A., Legrand F., Sousa M.S., Steffen V., Baudin S.* Dry-whip phenomenon in on-board rotordynamics: Modeling and experimentation. Journal of Sound and Vibration. Vol.513 (2021). Paper No: 116398, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116398>

38. *Chen H.M., Walton J., Heshmat H.* Zero Clearance Auxiliary Bearings for Magnetic Bearing Systems. ASME Turbo Expo 1997 (Orlando, Florida). Paper No: 97-GT-112, <https://doi.org/10.1115/97-GT-112>

39. *Chen Y., Yao G., Jiang J.* The forward and the backward full annular rubbing dynamics of a coupled rotor-casing/foundation system. International Journal of Dynamics and Control. Vol.1. Issue 2 (2013), pp.116-128. DOI: 10.1007/s40435-013-0012-2

40. *Childs D.W.* Rub-Induced Parametric Excitation in Rotors. Journal of Mechanical Design. Vol.101, No.4 (1979), pp.640-644. Пер. с англ. – *Чайлдс.* Параметрическое возбуждение роторов, вызванное задеванием о корпус // Конструирование и технология машиностроения, 1979, №4. С.48-53.

41. *Childs D.W.* Fractional-Frequency Rotor Motion Due to Nonsymmetric Clearance Effects. Journal of Engineering for Power. Vol.104, No.3 (1982), pp.533-541. Пер. с англ. – *Чайлдс.* Движения роторов с дробными частотами, обусловленные эффектами в несимметричных зазорах // Энергетические машины и установки, 1982, №3. С.2-11.

42. Childs D.W., Bhattacharya A. Prediction of Dry-Friction Whirl and Whip Between a Rotor and a Stator. Journal of Vibration and Acoustics. Vol.129. Issue 3 (2007), pp.355-362. DOI: 10.1115/1.2731412

43. Childs D.W., Kumar D. Dry-Friction Whip and Whirl Predictions for a Rotor-Stator Model With Rubbing Contact at Two Locations. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol.134. Issue 7 (2012). Article No: 072502, <https://doi.org/10.1115/1.4005979>

44. Chipato E., Shaw A.D., Friswell M.I. Frictional effects on the nonlinear dynamics of an overhung rotor. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol.78 (2019). Article No: 104875, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104875>

45. Chipato E.T., Shaw A.D., Friswell M.I. Nonlinear rotordynamics of a MDOF rotor-stator contact system subjected to frictional and gravitational effects. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol.159 (2021). Article No: 107776, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107776>

46. Choi Y.S., Noah S.T. Nonlinear Steady-State Response of a Rotor-Support System. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol.109, No.3 (1987), pp.255-261. Пер. с англ. – Чой, Ноэх. Нелинейные установившиеся колебания в системе ротор-опора // Конструирование и технология машиностроения, 1988, №2. С.264-272.

47. Choi Y.S. Dynamics of Rotor Rub in Annular Clearance with Experimental Evaluation. KSME Journal. Vol.8. No.4 (1994), pp.404-413.

48. Choi Y.S. Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub. Journal of Sound and Vibration. Vol.258, Issue 1 (2002), pp.191-198. DOI: 10.1006/jsvi.5091

49. Choy F.K., Padovan J. Non-linear Transient Analysis of Rotor-Casing Rub Events. Journal of Sound and Vibration., Vol.113, No.3 (1987), pp.529-545.

50. Choy F.K., Padovan J., Batur C. Rub Interactions of Flexible Casing Rotor Systems. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol.111, No.4 (1989),

pp.652-658. Пер. с англ. – Чой, Падован, Батур. Задевание в роторных системах с гибким корпусом // Современное машиностроение, серия А, 1990, №4. С.49-55.

51. *Chu F., Lu W.* Determination of the rubbing location in a multi-disk rotor system by means of dynamic stiffness identification. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.248. Issue 2 (2001), pp.235-246. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3687

52. *Cole M.O.T., Keogh P.S.* Asynchronous periodic contact modes for rotor vibration within an annular clearance. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2003. Vol.217 (10), pp.1101-1115. DOI: 10.1243/095440603322517126

53. *Cole M.O.T.* On stability of rotor dynamic systems with rotor-stator contact interaction. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2008. Vol.464, pp.3353-3375. DOI: 10.1098/rspa.2008.0237

54. *Cveticanin L.* Stability of a Clamped-Free Rotor with Variable Mass for the Case of Radial Rubbing. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.129, No.3 (1989), pp.489-499.

55. *Diangui H.* Experiment on the characteristics of torsional vibration of rotor-to-stator rub in turbomachinery. *Tribology International*. Vol.33. Issue 2 (2000), pp.75-79. DOI: 10.1016/S0301-679X(00)00029-3

56. *Dimarogonas A.D., Sandor G.N.* Packing Rub Effect in Rotating Machinery. I. A State of the Art Review. *Wear*. Vol.14 (1969), pp.153-170.

57. *Ehehalt U., Hochlenert D., Markert R., Weber H.I.* Approximate Description of Backward Whirl at Rotor-Stator-Contact. In: *Advances in vibration control and diagnostics. A selection of papers edited by N. Bachschmid and P. Pennacchi*. Polimetrica Publisher, Italy, 2006, pp.65-82.

58. *Ehehalt U., Alber O., Markert R., Wegener G.* Experimental observations on rotor-to-stator contact. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.446 (2019), pp.453-467, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.008>

59. *Ehrich F.F., O'Connor J.J.* Stator Whirl with Rotors in Bearing Clearance. Journal of Engineering for Industry. Vol.89, No.3 (1967), pp.381-390. Пер. с англ. – *Эрих, О'Коннор*. Вихрь статора при вращении ротора в подшипниковом зазоре // Конструирование и технология машиностроения, 1967, №3. С.1-12.

60. *Ehrich F.F.* The Dynamic Stability of Rotor/Stator Radial Rubs in Rotating Machinery. Journal of Engineering Industry. Vol.91, No.4 (1969), pp.1025-1028. Пер. с англ. – *Эрих*. Динамическая устойчивость ротационных машин при сухом трении в радиальном зазоре между ротором и статором // Конструирование и технология машиностроения, 1969, №4. С.107-111.

61. *Ehrich F.F.* High Order Subharmonic Response of High Speed Rotors in Bearing Clearance. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. Vol.110, No.1 (1988), pp.9-16. Пер. с англ. – *Эрих*. Субгармонические колебания высших порядков у быстроходных роторов с зазорами в подшипниках // Конструирование и технология машиностроения, 1988, №4. С.129-141.

62. *Ehrich F.F.* Some Observations of Chaotic Vibration Phenomena in High-Speed Rotordynamics. Journal of Vibration and Acoustics. Vol.113, No.1 (1991), pp.50-57. Пер. с англ. – *Эрих*. Явления хаотических вибраций в динамике высокоскоростных роторных систем // Современное машиностроение, серия Б, 1991, №5, С.72-80.

63. *Fatarella F.* On the Dynamics of Reverse Whirl Due to Rotor/Stator Interaction. PhD thesis. Imperial College of Science and Medicine, London, 1999. 195 p.

64. *Feng Z.C., Zhang X.-Z.* Rubbing phenomena in rotor-stator contact. Chaos, Solitons and Fractals. Vol.14 (2002), pp.257-267. DOI: 10.1016/S0960-0779(01)00231-4

65. *Flowers G.T., Wu F.S.* A Study of the Influence of Bearing Clearance on Lateral Coupled Shaft/Disk Rotordynamics. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol.115, No.2 (1993), pp.279-286.

66. *Foppl A.* Das Problem der Laval'schen Turbinewelle. Der Civilingenieur. Bd.16 (1895), pp.332-342.
67. *Goldman P., Muszynska A.* Chaotic Behavior of Rotor/Stator Systems With Rubs. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol.116, Issue 3 (1994), pp.692-701, <https://doi.org/10.1115/1.2906875>
68. *Goldman P., Muszynska A.* Rotor-to-Stator, Rub-related, Thermal/Mechanical Effects in Rotating Machinery. Chaos, Solitons & Fractals. Vol.5, Issue 9 (1995), pp.1579-1601, [https://doi.org/10.1016/0960-0779\(94\)00165-M](https://doi.org/10.1016/0960-0779(94)00165-M)
69. *Grāpis O., Tamužs V., Ohlson N.-G., Andersons J.* Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident. Journal of Sound and Vibration. Vol.290 (2006), pp.910-927. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.04.031
70. *Groll G.V., Ewins D.J.* The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. Journal of Sound and Vibration. Vol.241. Issue 2 (2001), pp.223-233. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3298
71. *Guo C., AL-Shudeifat M.A., Vakakis A.F., Bergman L.A., McFarland D.M., Yan J.* Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy sinks. Nonlinear Dynamics. Vol.79 (2015), pp.527-538. DOI: 10.1007/s11071-014-1684-7
72. *Guo K., Jiang J., Li Z.* Diffusion and Persistence of Rotor/Stator Synchronous Full Annular Rub Response Under Weak Random Perturbations. Journal of Vibration Engineering & Technologies. Vol.8 (2020), pp.599-611, <https://doi.org/10.1007/s42417-019-00163-8>
73. *Heshmat H., Chen H.M.* Zero Clearance Auxiliary Bearing for Providing Rotor Shock Tolerance. US Patent No. 5752774 (1998).
74. *Hong J., Yu P., Zhang D., Ma Y.* Nonlinear dynamic analysis using the complex nonlinear modes for a rotor system with an additional constraint due to rub-impact. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol.116 (2019), pp.443-461, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.06.061>

75. *Hunt K.H., Crossley F.R.E.* Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*. Vol.42, Issue 2 (1975), pp.440-445.

76. *Jansen J.D.* Non-Linear Rotor Dynamics as Applied to Oilwell Drillstring Vibrations. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.147, No.1, (1991), pp.115-135.

77. *Jeffcott H.H.* The Lateral Vibrations of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed: The Effect of Want of balance. *Philosophy Magazine*. Vol.37, no.219 (1919), pp.304-314.

78. *Jiang J., Ulbrich H.* The Physical Reason and the Analytical Condition for the Onset of Dry Whip in Rotor-to-Stator Contact Systems. *Journal of Vibration and Acoustics*. Vol.127. Issue 6 (2005), pp.594-603, <https://doi.org/10.1115/1.1888592>

79. *Jiang J.* Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*. Vol.57 (2009), pp.351-361. DOI: 10.1007/s11071-008-9446-z

80. *Kartheek A., Vijayan K.* Nonlinear interactions within a flexible rotating shaft. *Proceedings of the ASME 2019 Gas Turbine India Conference - GTINDIA2019*, Chennai, Tamil Nadu, India. Paper No: GTINDIA2019-2766, <https://doi.org/10.1115/GTINDIA2019-2766>

81. *Kellenberger W.* Spiral Vibrations Due to the Seal Rings in Turbogenerators Thermally Induced Interaction Between Rotor and Stator. *Journal of Mechanical Design*. Vol.102, No.1 (1980), pp.177-184. Пер. с англ. – *Келленбергер*. Спиральные вибрации вала турбогенератора в кольцевых уплотнениях, порождаемые тепловым взаимодействием между статором и ротором // *Конструирование и технология машиностроения*, 1980, №1. С.121-128.

82. *Keogh P.S., Cole M.O.T.* Contact Dynamic Response With Misalignment in a Flexible Rotor/Magnetic Bearing System. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Vol.128 (2006), pp.362-369. DOI: 10.1115/1.2056530

83. *Keogh P.S.* Contact dynamic phenomena in rotating machines: active/passive considerations. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol.29 (2012), pp.19-33, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.06.024>

84. *Khulief Y.A., Al-Sulaiman F.A., Bashmal S.* Vibration analysis of drillstrings with self-excited stick-slip oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.299 (2007), pp.540-558. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.06.065

85. *Krishna I.R.P., Padmanabhan C.* Experimental and numerical investigations on rotor-stator rub. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2018. Vol.232, pp.3200-3212. DOI: 10.1177/0954406217735348

86. *Kumar D.* Backward Precessional Whip and Whirl for a Two-Point Rubbing Contact Model of a Rigid Rotor Supported by an Elastically Supported Rigid Stator. Master of Science thesis. Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, TX, 2010.

87. *Lahriri S., Weber H.I., Santos I.F., Hartmann H.* Rotor-stator contact dynamics using a non-ideal drive – Theoretical and experimental aspects. *Journal of Sound and Vibration*, Vol.331 (2012), pp.4518-4536, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.008>

88. *Lahriri S., Santos I.F.* Theoretical modelling, analysis and validation of the shaft motion and dynamic forces during rotor-stator contact. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.332 (2013), pp.6359-6376, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.07.008>

89. *Lankarani H.M., Nikravesh P.E.* A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. *Journal of Mechanical Design*. Vol.112 (1990), pp.369-376.

90. *Laxalde D., Thouverez F.* Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.322, Issue 4 (2009), pp.1009-1025, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.044>

91. *Leine R.I., van Campen D.H., Keultjes W.J.G.* Stick-slip Whirl Interaction in Drillstring Dynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*. Vol.124, Issue 2 (2002), pp.209-220, <https://doi.org/10.1115/1.1452745>
92. *Lingener A.* Investigation of Reverse Whirl of a Flexible Rotor. *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol.24, No.2 (1991), pp.3-21.
93. *Ma H., Tai X., Han Q., Wu Z., Wang D., Wen B.* A revised model for rubbing between rotating blade and elastic casing. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.337 (2015), pp.301-320. DOI: 10.1016/j.jsv.2014.10.020
94. *Ma H., Yin F., Guo Y., Tai X., Wen B.* A review on dynamic characteristics of blade–casing rubbing. *Nonlinear Dynamics*. Vol.84 (2016), pp.437-472. DOI: 10.1007/s11071-015-2535-x
95. *Maslen E.H., Barrett L.E.* Rotor Whirl in Compliant Auxiliary Bearings. *Journal of Vibration and Control*. Vol.2 (1996), pp.145-159, <https://doi.org/10.1177/107754639600200202>
96. *Mokhtar M.A., Darpe A.K., Gupta K.* Analysis of stator vibration response for the diagnosis of rub in a coupled rotor-stator system. *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol.144 (2018), pp.392-406, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.019>
97. *Mercier A., Jézéquel L., Besset S., Hamdi A., Diebold J.-F.* Studies on detachment non-linearity at the rotor-stator interface. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.468 (2020). Article No: 115084, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115084>
98. *Murakami K., Sato H.* Vibration Characteristics of a Beam With Support Accompanying Clearance. *Journal of Vibration and Acoustics*. Vol.112, Issue 4 (1990), pp.508-514, <https://doi.org/10.1115/1.2930136>
99. *Muszynska A., Goldman P.* Chaotic Responses of Unbalanced Rotor/Bearing/Stator Systems with Looseness or Rubs. *Chaos, Solitons & Fractals*. Vol.5, Issue 9 (1995), pp.1683-1704. DOI: 10.1016/0960-0779(94)00171-L

100. Ouy E.G. Suppression of Rubbing in Rotating Machines by Lemon-Type Bearing. Journal of Vibration and Acoustics. Vol.141, Issue 5 (2019). Paper No: VIB-18-1359, <https://doi.org/10.1115/1.4043817>

101. *Padovan J., Choy F.K.* Nonlinear Dynamics of Rotor/Blade/Casing Rub Interactions. Journal of Turbomachinery. Vol.109, No.4 (1987), pp.527-534. Пер. с англ. – *Падован, Чой*. Нелинейные задачи динамики взаимодействий при задевании рабочих лопаток о корпус // Энергетические машины и установки, 1988, №4. С.48-56.

102. *Padovan J., Choy F.K., Batur C., Canilang L.* Seismic-Induced Impeller/Blade Rubs in Rotating Power Plant Components. Journal of Pressure Vessel Technology. Vol.110, No.4 (1988), pp.405-412. Пер. с англ. – *Падован, Чой, Батур, Каниланг*. Задевание рабочего колеса с лопатками за корпус в роторных узлах энергетических установок при сейсмических воздействиях // Современное машиностроение, серия Б, 1989, №9. С.13-20.

103. *Patel T.H., Darpe A.K.* Vibration response of a cracked rotor in presence of rotor-stator rub. Journal of Sound and Vibration. Vol.317 (2008), pp.841-865. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.032

104. *Patel T.H., Darpe A.K.* Coupled bending-torsional vibration analysis of rotor with rub and crack. Journal of Sound and Vibration. Vol.326 (2009), pp.740-752. DOI:10.1016/j.jsv.2009.05.020

105. *Peletan L., Baguet S., Torkhani M., Jacquet-Richardet G.* Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor-stator dynamics. Nonlinear Dynamics. Vol.78 (2014), pp.2501-2515. DOI: 10.1007/s11071-014-1606-8

106. *Popp T., Stibbe H., Heinisch D., Reckmann H., Spanos P.* Backward Whirl Testing and Modeling with Realistic Borehole Contacts for Enhanced Drilling Tool Reliability. The IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition, Fort Worth, Texas, USA, March 2018. Paper No: SPE-189600-MS, <https://doi.org/10.2118/189600-MS>

107. *Püst L.* Oscillations of rotor supported on magnetic bearings with impacts in retainer bearings. *Journal of theoretical and applied mechanics*. Vol.45, Issue 1 (2007), pp.99-117.

108. *Roques S., Legrand M., Cartraud P., Stoisser C., Pierre C.* Modeling of a rotor speed transient response with radial rubbing. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.329 (2010), pp.527-546. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.09.016

109. *Salvat N., Batailly A., Legrand M.* Two-dimensional modeling of unilateral contact-induced shaft precessional motions in bladed-disk/casing systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Vol.78 (2016), pp.90-104, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.001>

110. *Sawicki J.T., Montilla-Bravo A., Gosiewski Z.* Thermomechanical Behavior of Rotor with Rubbing. *International Journal of Rotating Machinery*. Vol.9, Issue 1 (2003), pp.41-47. DOI: 10.1080/10236210390147371

111. *Shang Z., Jiang J., Hong L.* The global responses characteristics of a rotor/stator rubbing system with dry friction effects. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.330 (2011), pp.2150-2160. DOI: 10.1016/j.jsv.2010.06.004

112. *Shen X., Jia J., Zhao M.* Effect of parameters on the rubbing condition of an unbalanced rotor system with initial permanent deflection. *Archive of Applied Mechanics*. Vol.77 (2007), pp.883-892. DOI: 10.1007/s00419-007-0134-0

113. *Smalley A.J.* The Dynamic Response of Rotors to Rubs During Startup. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*. Vo.111, No.3 (1989), 226-233.

114. *Sundararajan P., Noah S.* An algorithm for response and stability of large order non-linear systems – application to rotor systems. *Journal of Sound Vibration*. Vol.214. Issue 4 (1998), pp.695-723, <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1614>

115. *Srivastava A.K., Tiwari M., Singh A.* Identification of rotor-stator rub and dependence of dry whip boundary on rotor parameters. *Mechanical Systems and*

Signal Processing. Vol.159 (2021). Article No: 107845, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107845>

116. *Tehrani G.G., Dardel M.* Mitigation of nonlinear oscillations of a Jeffcott rotor System with an optimized damper and nonlinear energy sink. International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol.98 (2018), pp.122-136, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.10.011>

117. *Torkhani M., May L., Voinis P.* Light, medium and heavy partial rubs during speed transients of rotating machines: Numerical simulation and experimental observation. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol.29 (2012), pp.45-66. DOI: 10.1016/j.ymssp.2012.01.019

118. *Varney P., Green I.* Rotordynamic Analysis of Rotor-Stator Rub Using Rough Surface Contact. Transactions of the ASME. Journal of Vibration and Acoustics, 2016. Vol.138(2), pp.021015-1-021015-9, <https://doi.org/10.1115/1.4032515>

119. *Varney P., Green I.* Rough Surface Contact of Curved Conformal Surfaces: An Application to Rotor-Stator Rub. Transactions of the ASME. Journal of Tribology, 2016. Vol.138(4), pp.041401-1-041401-7, <https://doi.org/10.1115/1.4032786>

120. *Vlajic N., Champneys A.R., Balachandran B.* Nonlinear dynamics of a Jeffcott rotor with torsional deformations and rotor-stator contact. International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol.92 (2017), pp.102-110, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.002>

121. *Wang J., Ma L., Zhang J., Lu X., Yu Y.Y.* Mitigation of nonlinear rub-impact of a rotor system with magnetorheological damper. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. Vol.31. Issue 3 (2020), pp.321-338, <https://doi.org/10.1177/1045389X19888729>

122. *Wegener G., Markert R., Pothmann K.* Steady-State-Analysis of a Multi-Disk or Continuous Rotor with one Retainer Bearing. Proceedings of the 5th

International Conference on Rotor Dynamics. Darmstadt (Germany), 7-10 September 1998, pp.816-828.

123. *Wilkes J.C., Childs D.W., Dyck B.J., Phillips S.G.* The Numerical and Experimental Characteristics of Multimode Dry-Friction Whip and Whirl. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Vol.132. Issue 5 (2010). Article: 052503-1-9, <https://doi.org/10.1115/1.3204658>

124. *Wilkes J., Moore J., Ransom D., Vannini G.* An Improved Catcher Bearing Model and an Explanation of the Forward Whirl/Whip Phenomenon Observed in Active Magnetic Bearing Transient Drop Experiments. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol.136. Issue 4 (2014). Article: 042504, <https://doi.org/10.1115/1.4025890>

125. *Wilkes J.C., Allison T.* A General Model for Two-Point Contact Dry-Friction Whip and Whirl – Further Advancements and Experimental Test Results. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition - GT2015*, Montréal, Canada. Paper No: GT2015-43815, <https://doi.org/10.1115/GT2015-43815>

126. *Wilkes J.C.* Application of dry-friction whip and whirl solution methods to systems with support asymmetry. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2018 - Turbomachinery Technical Conference and Exposition - GT2018*, Oslo, Norway. Paper No: GT2018-76991, <https://doi.org/10.1115/GT2018-76991>

127. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. DOI: 10.1007/978-3-211-77298-0.

128. *Xu J., Li Q., Wang S.* Impulsive Control of the Rotor-Stator Rub Based on Phase Characteristic. *Abstract and Applied Analysis*. Vol. 2014. Article ID 495747 (7 pages), <http://dx.doi.org/10.1155/2014/495747>

129. *Yao H., Wang Y., Cao Y., Wen B.* Multi-stable nonlinear energy sink for rotor system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Vol.118 (2020). Article No: 103273, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103273>

130. Yu J.J., Goldman P., Bently D.E., Muzynska A. Rotor/Seal Experimental and Analytical Study on Full Annular Rub. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol.124, Issue 2 (2002), pp.340-350. DOI: 10.1115/1.1416691
131. Yu J.J. On Occurrence of Reverse Full Annular Rub. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol.134, Issue 1 (2012), Article No:012505, <https://doi.org/10.1115/1.4004161>
132. Yu P., Chen G. Nonlinear modal analysis and its application on prediction of resonance speed for a rotor-stator rubbing system. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. Vol.43 (2021). Article No: 209, <https://doi.org/10.1007/s40430-021-02918-5>
133. Zhang W. Flexible Shaft Whirl Induced by Dry Friction and Its Stability. Applied Mathematics and Mechanics, English Edition Published by HUST Press, China. Vol.3, No.5 (1982), pp.731-738.
134. Zhang G.F., Xu W.N., Xu B., Zhang W. Analytical study of nonlinear synchronous full annular rub motion of flexible rotor–stator system and its dynamic stability. Nonlinear Dynamics. Vol.57 (2009), pp.579-592. DOI: 10.1007/s11071-009-9551-7
135. Zhang H., Chen Y., Li J. Bifurcation on synchronous full annular rub of rigid-rotor elastic-support system. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). Vol.33, Issue 7 (2012), pp.865-880. DOI: 10.1007/s10483-012-1591-7
136. Zhou P., Du M., Chen S., He Q., Peng Z., Zhang W. Study on intra-wave frequency modulation phenomenon in detection of rub-impact fault. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol.122 (2019), pp.342-363, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.12.011>
137. Ziaei-Rad S., Kouchaki E., Imregun M. Thermoelastic Modeling of Rotor Response With Shaft Rub. Journal of Applied Mechanics. Vol.77, Issue 6 (2010). Article No: 061010, <https://doi.org/10.1115/1.4000904>

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Никифоров Андрей Николаевич

**АНАЛИТИКА СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМЕ
НЕПРЕРЫВНОГО КОНТАКТА РОТОРА СО СТАТОРОМ**

Монография

Подписано в печать 14.03.2022.
Формат 60х84 1/16. Усл. печ. л. 7,5.
Тираж 500 экз.
МЦНП «Новая наука»
185002, г. Петрозаводск
ул. С. Ковалевской д.16Б помещ. 35
office@sciencen.org

ISBN 978-5-00174-500-6



9 785001 745006 >